INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA
La integral de Ito

Introducción

El Cálculo Estocástico es en realidad únicamente Cálculo Integral Estocástico, por lo menos en lo que se refiere a la teoría que quedó prácticamente concluída hacia finales de los años 70's del siglo pasado. Después, esa teoría se fue ampliando y se desarrolló en varias direcciones. Ahora bien, al igual que ocurrió con el Cálculo Diferencial e Integral que conocemos, la teoría de Integración Estocástica se desarrolló para poderla aplicar en la solución de cierto tipo de problemas de interés. De manera específica, el objetivo es poder resolver las llamadas ecuaciones diferenciales estocásticas, las cuales también son en realidad ecuaciones integrales estocásticas. En el Cálculo Estocástico Clásico no hay derivadas; es decir, no hay un Cálculo Diferencial Estocástico ya que, en general, se trabaja con funciones que no son diferenciables. A su vez, el resolver ecuaciones diferenciales estocásticas tiene por objetivo el poder construir procesos estocásticos que modelen fenómenos de interés en diversas áreas.

Una ecuación diferencial estocástica (EDE) es una relación de la forma:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

donde $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico, μ y σ son dos funciones reales definidas en $\mathbb{R}^2$ y $(W_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Wiener.

Ecuaciones de este tipo se presentan en una diversidad de situaciones. La idea general es que si un sistema dinámico es modelado por una ecuación diferencial ordinaria $\frac{dX}{dt} = \mu(t, X)$ y dicho sistema es perturbado por la presencia de un ruido.^{a}leatorio, entonces la modelación estaría dada por una ecuación de la forma $\frac{dX}{dt} = \mu(t, X) + \sigma\left(t, X\right)\xi\left(t\right)$, donde ξ representa la perturbación aleatoria. El ruido ξ se modela usualmente como la "derivada"de un proceso de Wiener, de manera que la última ecuación se escribiría en la forma:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

μ es llamada el **arrastre** (drift) y σ la **volatilidad**.

El proceso de Wiener es un modelo matemático desarrollado por Norbert Wiener, entre los años entre 1921 y 1923, del movimiento browniano, el cual consiste en el movimiento que presenta una pequeña partícula suspendida en un líquido, el cual es debido a los choques de las moléculas del líquido con la partícula. Fue estudiado a fondo por Robert Brown en el año 1827, de ahí su nombre. La explicación de este movimiento observado por Brown la dio Einstein basándose en la teoría molecular.

Lo que hizo Wiener fue definir un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y, para cada $t \geq 0$, una variable aleatoria $W_t : \Omega \to \mathbb{R}$ de tal manera que la familia $(W_t)_{t\geq 0}$ tenga las propiedades que se considera tiene un movimiento browniano, las cuales son las siguientes:

1. Las posibles trayectorias $t \to W_t$ son funciones continuas.
2. $E[W_t] = 0$ para toda t.
3. Dados $0 \leq s < t$, $W_t - W_s$ es independiente de la trayectoria seguida hasta el tiempo s.
4. Dados $0 \leq s < t$, la distribución de $W_t - W_s$ es una función de $t - s$.

Se puede mostrar que bajo estas condiciones, $W_t - W_s$ tiene distribución normal con media cero y varianza $t - s$.

En el modelo desarrollado por Wiener se puede mostrar que, con probabilidad 1, las funciones $t \to W_t$ no son diferenciables; así que $\sigma(X_t, t)dW_t$ no puede entenderse en el sentido usual. En sentido escrito una EDE es en realidad una ecuación integral:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s$$

Sin embargo, al no ser diferenciables las funciones $t \to W_t$, tampoco son de variación acotada; de manera que la integral $\int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s$ no puede entenderse en el sentido usual, como una integral de Stieltjes o como una integral de Lebesgue.

De ahí la importancia del resultado de K. Ito (Stochastic Integral, 1944) al darle un sentido preciso a una integral de la forma $\int_0^t Z_s dW_s$ para una familia amplia de procesos $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Definiciones y resultados previos

Definición 1. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{G}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Diremos que:*

1. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo complementos si $A^c \in \mathcal{G}$ para cualquier $A \in \mathcal{G}$.*
2. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo diferencias propias si $B - A \in \mathcal{G}$ para cualquier pareja $A, B \in \mathcal{G}$ tal que $A \subset B$.*
3. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo uniones (resp. intersecciones) finitas si $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{G}$ (resp. $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{G}$) para cualquier colección finita $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de elementos de $\mathcal{G}$.*
4. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo uniones (resp. intersecciones) infinitas numerables si $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{G}$ (resp. $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{G}$) para cualquier colección infinita numerable $A_1, A_2, A_3, \ldots$ de elementos de $\mathcal{G}$.*
5. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo uniones (resp. intersecciones) monótonas si $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{G}$ (resp. $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{G}$) para cualquier sucesión creciente (resp. decreciente) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{G}$.*

Definición 2 (álgebra). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto. Se dice que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{F}$ es un álgebra si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$\mathbb{F} \in \mathcal{A}$.*
2. *$\mathcal{A}$ es cerrada bajo complementos.*
3. *$\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones finitas.*

Definición 3 ($\boldsymbol{\sigma}$-álgebra). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto. Se dice que una familia $\Im$ de subconjuntos de $\mathbb{F}$ es una σ-álgebra si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$\mathbb{F} \in \Im$.*
2. *$\Im$ es cerrada bajo complementos.*
3. *$\Im$ es cerrada bajo uniones infinitas numerables.*

Definición 4. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{G}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Llamaremos σ-álgebra generada por $\mathcal{G}$ a la más pequeña familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$ que forme una σ-álgebra y que contenga a todos los elementos de $\mathcal{G}$. Denotaremos por $\sigma(\mathcal{G})$ a esa σ-álgebra.*

Definición 5. *Por una celda en $\mathbb{R}^n$ se entenderá un conjunto de la forma $I_1 \times \cdots \times I_n$, donde $I_1, \cdots, I_n$ son intervalos en $\mathbb{R}$. Si cada uno de los intervalos I_k es abierto, diremos que la celda es abierta.*

Definición 6. *Si $C = I_1 \times \cdots \times I_n$ es una celda en $\mathbb{R}^n$, al producto*

$$\prod_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

donde $\ell(I_k)$ representa la longitud del intervalo I_k, lo llamaremos el hipervolumen de la celda C y lo denotaremos por $v_0(C)$. En los casos de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ lo llamaremos también la longitud, el área y el volumen, respectivamente

Definición 7 (**σ-álgebra de Borel en** $\mathbb{R}^n$)**.** *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$, la cual será denotada por $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, es la σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ generada por las celdas en $\mathbb{R}^n$. A los elementos de esa σ-álgebra los llamaremos borelianos de $\mathbb{R}^n$.*

Definición 8. *Diremos que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tiene medida cero si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito o infinito numerable de celdas abiertas, cuya unión contenga al conjunto dado y tales que la suma de sus hipervolúmenes sea menor que ε.*

Definición 9. *La σ-álgebra de los conjuntos Lebesgue medibles en $\mathbb{R}^n$ es la σ-álgebra generada por las celdas en $\mathbb{R}^n$ y los conjuntos de medida cero en $\mathbb{R}^n$.*

Definición 10 (**Clase monótona**)**.** *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathbb{M}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que $\mathbb{M}$ es una clase monótona si es cerrada bajo uniones e intersecciones monótonas.*

Definición 11. *Dada una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{F}$, se define la clase monótona generada por $\mathcal{A}$ como la más pequeña familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$ que forme una clase monótona y que contenga a todos los elementos de $\mathcal{A}$. Denotaremos por $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ a esa clase monótona.*

Teorema 1 (Teorema de clases monótonas para álgebras)**.** *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$, entonces $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

Definición 12 (**π-sistema**)**.** *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{P}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que $\mathcal{P}$ es un π-sistema si es cerrada bajo intersecciones finitas.*

Definición 13 (**d-sistema**)**.** *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que $\mathcal{D}$ es un d-sistema si $\mathbb{F} \in \mathcal{D}$ y es cerrada bajo diferencias propias y uniones monótonas.*

Definición 14. *Dada una colección $\mathcal{G}$ de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{F}$, se define el d-sistema generado por $\mathcal{G}$ como la más pequeña familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$ que forme un d-sistema y que contenga a todos los elementos de $\mathcal{G}$. Denotaremos por $d(\mathcal{G})$ a ese d-sistema.*

Teorema 2 (Teorema de clases monótonas para pi sistemas). *Sea* $\mathbb{F}$ *un conjunto y* $\mathcal{P}$ *un* π*-sistema de subconjuntos de* $\mathbb{F}$*, entonces* $d(\mathcal{P}) = \sigma(\mathcal{P})$.

Vamos a trabajar con el conjunto de números reales extendidos, el cual consiste del conjunto de números reales y dos elementos especiales, $-\infty$ y ∞, con los cuales operaremos bajo las siguientes convenciones:

Si $c \in \mathbb{R}$, entonces:

$-\infty < c < \infty$,

$c - \infty = -\infty$,

$c + \infty = \infty$,

$c\,(\infty) = \infty$ si $c > 0$,

$c\,(\infty) = -\infty$ si $c < 0$,

$(0)\,(\infty) = (0)\,(-\infty) = 0$,

$\frac{c}{\infty} = \frac{c}{-\infty} = 0$,

$(\infty)\,(\infty) = \infty + \infty = \infty$,

$\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$ no están definidos.

$\overline{\mathbb{R}}$ denotará al conjunto $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definición 15 (**Función finitamente aditiva sobre un álgebra**). *Sea* $\mathbb{F}$ *un conjunto y* $\mathcal{A}$ *un álgebra de subconjuntos de* $\mathbb{F}$*. Se dice que una función no negativa* $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *es finitamente aditiva si dada cualquier familia finita,* $A_1, \ldots, A_n$*, de elementos de* $\mathcal{A}$ *tal que* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$*, entonces:*

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

Definición 16 (Función σ-aditiva sobre un álgebra). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es σ-aditiva si es finitamente aditiva y dada cualquier familia infinita numerable, $A_1, A_2, \ldots$, de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Definición 17 (Función σ-subaditiva sobre un álgebra). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es σ-subaditiva, o que satisface la propiedad de la subaditividad numerable, si dada cualquier colección infinita $A_1, A_2, \ldots$ de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, entonces:*

$$\mu\left(\textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Definición 18 (Función σ-aditiva sobre una σ-álgebra). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\Im$ una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se dice que una función no negativa $\mu : \Im \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es σ-aditiva si es finitamente aditiva y dada cualquier familia infinita numerable, $A_1, A_2, \ldots$, de elementos de $\Im$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$, entonces:*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Teorema 3. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto, $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ y $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una función no negativa y finitamente aditiva, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *μ es σ-subaditiva.*
2. *μ es σ-aditiva.*
3. *Para cualquier sucesión creciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, se tiene $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.*
4. *Para cualquier sucesión decreciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, se tiene $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.*
5. *Para cualquier sucesión decreciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, se tiene $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.*

Definición 19 (Espacio medible). *Un espacio medible es una pareja $(\mathbb{F}, \Im)$, donde $\mathbb{F}$ es un conjunto cualquiera y $\Im$ es una σ-álgebra de subconjuntos $\mathbb{F}$.*

Definición 20 (Quasi medida). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Diremos que una función no negativa $\mu : \mathcal{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es una quasi medida si es finitamente aditiva, σ-subaditiva y $\mu(\emptyset) = 0$.*

Definición 21 (**Medida**)**.** *Sea* $\mathbb{F}$ *un conjunto y* $\Im$ *una* σ*-álgebra de subconjuntos de* $\mathbb{F}$*. Se dice que una función no negativa* $\mu : \Im \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ *es una medida si* μ *es* σ*-aditiva y* $\mu(\emptyset) = 0$*.*

Definición 22 (**Espacio de medida**)**.** *Un espacio de medida es una terna* $(\mathbb{F}, \Im, \mu)$*, donde* $(\mathbb{F}, \Im)$ *es un espacio medible y* μ *es una medida definida sobre* $\Im$*.*

Definición 23. *Sea* $(\mathbb{F}, \Im, \mu)$ *un espacio de medida. Diremos que* μ *es finita si* $\mu(\mathbb{F}) < \infty$*. Diremos que* μ *es* σ*-finita si existe una colección infinita numerable de conjuntos* $E_k \in \Im$ *tales que* $\mathbb{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ *y* $\mu(E_k) < \infty$ *para cualquier* k*.*

Definición 24 (**Espacio de probabilidad**)**.** *Si* $(\Omega, \Im, P)$ *es un espacio de medida y* $P(\Omega) = 1$*, diremos que la terna* $(\Omega, \Im, P)$ *es un espacio de probabilidad.*

Definición 25. *Se dice que un espacio de medida* $(\mathbb{F}, \Im, \mu)$ *es completo si* $\Im$ *contiene a todos los subconjuntos de los conjuntos de medida cero.*

Teorema 4. *Todo espacio de medida se puede completar.*

Teorema 5 (**Teorema de extensión de Carathéodory**)**.** *Sea* $\mathbb{F}$ *un conjunto,* $\mathcal{A}$ *un álgebra de subconjuntos de* $\mathbb{F}$ *y* $\mu_0 : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ *una quasi medida. Entonces existe una medida* $\mu : \Im \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ *tal que* $\mu(A) = \mu_0(A)$ *para cualquier* $A \in \mathcal{A}$*, donde* $\Im$ *es una* σ*-álgebra que contiene a* $\sigma(\mathcal{A})$*.*

Teorema 6. *Existe una única medida definida sobre la* σ*-álgebra de los conjuntos Lebesgue medibles en* $\mathbb{R}^n$ *la cual asigna a cada celda en* $\mathbb{R}^n$ *su hipervolumen.*

Definición 26 (**Medida de Lebesgue en** R^n)**.** *La una única medida definida sobre la* σ*-álgebra de los conjuntos Lebesgue medibles en* $\mathbb{R}^n$*, que asigna a cada celda en* $\mathbb{R}^n$ *su hipervolumen, será llamada la medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$ *y la denotaremos por* λ_n*. Si* $n = 1$*, la denotaremos por* λ*.*

Definición 27 (Función medible). *Cuando se tiene un espacio medible $(\mathbb{F}, \Im)$, una función $f : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ es llamada medible si $f^{-1}((-\infty, x]) \in \Im$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$.*

En lo que sigue asumimos que tenemos definido un espacio de medida completo $(\mathbb{F}, \Im, \mu)$

Definición 28 (Función medible simple). *Se dice que una función medible φ es simple si tiene la forma siguiente:*

$$\varphi = \textstyle\sum_{k=1}^{n} b_k I_{F_k}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_n$ son números reales y $F_1, \ldots, F_n$ son elementos de $\Im$.

Teorema 7. *Sea $(\mathbb{F}, \Im)$ un espacio medible y $f : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible no negativa, entonces existe una sucesión no decreciente de funciones medibles simples no negativas $\varphi_n : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ tales que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(y) = f(y)$ para cualquier $y \in \mathbb{F}$.*

Definición 29. *Si $\varphi = \sum_{k=1}^{n} b_k I_{F_k}$ es una función medible simple, se define su integral sobre $\mathbb{F}$, con respecto a μ, $\int_{\mathbb{F}} \varphi d\mu$, de la siguiente manera:*

$$\textstyle\int_{\mathbb{F}} \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} b_k \mu(F_k)$$

Definición 30. *Si f es cualquier función medible no negativa, se define su integral sobre $\mathbb{F}$, con respecto a μ, $\int_{\mathbb{F}} f d\mu$, de la siguiente manera:*

$$\textstyle\int_{\mathbb{F}} f d\mu = \sup \left\{ \int_{\mathbb{F}} \varphi d\mu : \varphi \text{ es medible simple y } 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

Si $F \in \Im$, definimos:

$$\textstyle\int_{F} f d\mu = \int_{\mathbb{F}} I_E f d\mu$$

Definición 31. *Si f es cualquier función medible, se dice que f es integrable sobre un conjunto $F \in \Im$ si $\int_F |f| \, d\mu < \infty$.*

Definición 32. *Si f es una función medible e integrable sobre un conjunto $F \in \Im$, se define su integral sobre F, $\int_F f d\mu$, de la siguiente manera:*

$$\textstyle\int_F f d\mu = \int_F f^+ d\mu - \int_F f^- d\mu$$

donde f^+ y f^-, son la parte positiva y negativa de f, respectivamente.

Teorema 8 (Teorema de la convergencia monótona). *Sea f_n una sucesión no decreciente de funciones medibles no negativas, entonces:*

$$\int_{\mathbb{F}} \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{F}} f_n d\mu$$

Teorema 9 (Teorema de la convergencia dominada). *Sea g una función no negativa, integrable sobre un conjunto medible E, y $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión de funciones medibles tales que $|f_n| \leq g$ y $\lim_{n\to\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero, contenido en E, entonces:*

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\lambda$$

Definición 33 ($\boldsymbol{\sigma}$ álgebra generada por una familia de funciones). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto cualquiera. Dada una colección de funciones:*

$$\mathcal{H} = \{f_\gamma : \mathbb{F} \to \mathbb{R} : \gamma \in \Gamma\}$$

donde Γ es un conjunto de índices cualquiera, se define la σ-álgebra generada por $\mathcal{H}$ como la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ tal que toda función $f \in \mathcal{H}$ es medible. Denotaremos a esta σ-álgebra por $\sigma(\mathcal{H})$ o por $\sigma(\{f_\gamma : \gamma \in \Gamma\})$.

Definición 34. *Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una particion del intervalo $[a,b]$. Una suma de Riemann-Stieltjes $S(P,f,g)$ de f con respecto a g, correspondiente a la particion P, es una suma de la forma:*

$$S(P,f,g) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

donde $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definición 35 (Integral de Riemann-Stieltjes). *Se dice que f es integrable con respecto a g en el intervalo $[a,b]$ si existe un numero real I tal que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una particion P_ε del intervalo $[a,b]$ tal que $|S(P,f,g) - I| < \varepsilon$ para cualquier particion P que sea un refinamiento de P_ε y cualquier suma de Riemann-Stieltjes $S(P,f,g)$ de f con respecto a g, correspondiente a la particion P. Al numero real I de esta definición se le llama la integral Riemann-Stieltjes de f con respecto a g y se le denota por $(RS)\int_a^b f dg$.*

Definición 36 (Función de variación acotada). *Dada una función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ y una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a,b]$, definamos $V_g(P) = \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})|$.*

Diremos que g es de variación acotada en $[a,b]$ si:

$$V_g[a,b] = \sup\{V_g(P) : P \text{ es una partición de } [a,b]\} < \infty$$

Teorema 10. *Si g es de variación acotada en $[a,b]$, entonces toda función continua es integrable con respecto a g en el intervalo $[a,b]$.*

Teorema 11. *Si toda función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable con respecto a la función acotada $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, entonces g es de variación acotada en $[a,b]$.*

Teorema 12 (Fórmula de integración por partes). *Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ dos funciones. Si f es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a g, entonces g es Riemann-Stieltjes integrable con respecto a f. Además, en este caso, se tiene:*

$$(RS)\int_a^b g df = g(b) f(b) - g(a) f(a) - (RS)\int_a^b f dg$$

Nuevamente, en lo que sigue asumimos que tenemos definido un espacio de medida completo $(\mathbb{F},\Im,\mu)$

Definición 37. *Para $p\in(0,\infty)$, denotaremos por $\mathcal{L}^p$ al conjunto de funciones medibles f tales que $\int_{\mathbb{F}} |f|^p d\mu<\infty$.*

Definición 38. *Diremos que dos funciones medibles son iguales casi en todas partes si la medida del subconjunto de $\mathbb{F}$ en el cual son distintas tiene medida cero.*

Definición 39. *Para $p\in(0,\infty]$, el conjunto de clases de equivalencia en las cuales queda partido L^p, mediante la relación de equivalencia definida por la igualdad casi en todas partes, será denotado por L^p.*

Definición 40. *Si $p\in[1,\infty)$ y $f\in L^p$, definimos:*

$$||f||_p = \left(\int_{\mathbb{F}} |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Teorema 13. *Para cualquier $p\in[1,\infty)$, L^p, con la norma $||\bullet||_p$ es un espacio vectorial normado completo.*

Definición 41. *Para $p \in [1, \infty)$, se dice que una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones medibles converge en L^p a la función medible $f \in L^p$ si $f_n \in L^p$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y:*

$$\text{lím}_{n\to\infty} ||f_n - f||_p = 0$$

Si éste es el caso, se escribirá $f_n \xrightarrow{L^p} f$

Teorema 14. *Sea $p \in [1, \infty)$. El conjunto de las funciones simples nulas fuera de un conjunto de medida finita es denso en L^p.*

Definición 42 (Convergencia casi en todas partes). *Diremos que una sucesión de funciones medibles $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge casi en todas partes a una función medible f si $\text{lím}_{n\to\infty} f_n = f$ excepto a lo más en un conjunto de medida cero. Si éste es el caso, se escribirá $f_n \xrightarrow{c.t.p.} f$.*

Definición 43 (Convergencia en medida). *Diremos que una sucesión de funciones medibles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en medida si existe una función medible f tal que:*

$$\text{lím}_{n\to\infty} \mu\left(\{y \in \mathbb{F} : |f_n(y) - f(y)| > \varepsilon\}\right) = 0$$

para cualquier $\varepsilon > 0$. Si éste es el caso, se escribirá $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Teorema 15. *Supongamos que μ es finita y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tal que $f_n \xrightarrow{c.t.p.} f$, entonces $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

Teorema 16. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles que converge en medida, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge casi en todas partes a una función medible f y tal que, dada $\delta > 0$, existe un conjunto medible A tal que $\mu(A) < \delta$ y la sucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f sobre A^c.*

Teorema 17. *Sea $p \in [1, \infty)$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tal que $f_n \xrightarrow{L^p} f$, entonces $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

En el contexto de la Teoría de la Probabilidad; es decir, si el espacio de medida es un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, a cada elemento de $\Im$ se le llama un evento, a una función medible se le llama variable aleatoria, la convergencia casi en todas partes se denomina convergencia casi segura (c.s.) y a la convergencia en medida se le llama convergencia en probabilidad. Además, si X es una variable aleatoria y la integral $\int_\Omega XdP$ está bien definida, a esa integral se le llama la esperanza de X y se le denota por $E[X]$.

En lo que sigue, asumimos que tenemos definido un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \Im, P)$.

Teorema 18 (**Lema de Borel-Cantelli**). *Sea $A_1, A_2, \ldots$ una sucesión de eventos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ y sea:*

$$A = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ para una infinidad de valores de } n\}$$

Entonces $P(A) = 0$.

Teorema 19 (**Existencia de la esperanza condicional**). *Sea X una variable aleatoria de esperanza finita y $\mathcal{G}$ una sub σ-álgebra de $\Im$, existe entonces una variable aleatoria Z, medible con respecto a $\mathcal{G}$, de esperanza finita y tal que $\int_B ZdP = \int_B XdP$ para cualquier conjunto $B \in \mathcal{G}$. Además, si Y es otra variable aleatoria con las mismas propiedades que Z, entonces $P[Y = Z] = 1$.*

Definición 44. *Sea X es una variable aleatoria de esperanza finita y $\mathcal{G}$ una sub σ-álgebra de $\Im$. Se dice que Z es una versión de la esperanza condicional de X con respecto a $\mathcal{G}$ y se escribe $E[X \mid \mathcal{G}] = Z$ c.s. si Z una variable aleatoria medible con respecto a $\mathcal{G}$, de esperanza finita y tal que $\int_B ZdP = \int_B XdP$ para cualquier evento $B \in \mathcal{G}$.*

Procesos estocásticos

Asumimos que tenemos un espacio de probabilidad completo $(\Omega, \Im, P)$.

Definición 45. *Sean $(E, \mathcal{E})$ un espacio medible y Γ un conjunto cualquiera. Llamaremos proceso estocástico definido sobre $(\Omega, \Im, P)$, con conjunto de índices en Γ y con espacio de estados E, a toda familia $\{X_t\}_{t\in\Gamma}$ de funciones medibles definidas sobre Ω y con valores en E. Dada $\omega \in \Omega$, la función $t \longmapsto X_t(\omega)$ es llamada una trayectoria del proceso. Para referirnos a un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in\Gamma}$ utilizaremos la notación $(X_t)_{t\in\Gamma}$.*

En general, un proceso estocástico representa la dinámica de un fenómeno aleatorio, en cuyo caso el conjunto Γ de índices representa el tiempo durante el cual evoluciona el fenómeno en consideración, así que Γ es un conjunto de números reales. El caso más común consiste en el estudio de un fenómeno aleatorio que evoluciona a partir de un tiempo inicial $t_0 \geq 0$, de manera que Γ es un subconjunto de $[0, \infty)$; en muchos casos de interés, se trata del conjunto de números enteros no negativos o del conjunto de números reales no negativos. En algunos casos será de interés considerar también una variable aleatoria X_∞.

Los conjuntos de índices con los que trataremos serán entonces el conjunto de números enteros no negativos, el cual denotaremos por $\mathbb{Z}^+$ y el conjunto de números reales no negativos, el cual denotaremos por $\mathbb{R}^+$, de manera que tendremos $\Gamma = \mathbb{Z}^+$ o $\Gamma = \mathbb{R}^+$. $\overline{\mathbb{Z}}^+$ denotará al conjunto $\mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ y $\overline{\mathbb{R}}^+$ al conjunto $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

Si $\Gamma = \mathbb{Z}^+$ diremos que $(X_t)_{t\in\Gamma}$ es un proceso estocástico en tiempo discreto, mientras que si $\Gamma = \mathbb{R}^+$ diremos $(X_t)_{t\in\Gamma}$ es un proceso estocástico en tiempo continuo.

Únicamente consideraremos el caso de procesos estocásticos con valores reales, de manera que E será el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ y $\mathcal{E}$ la σ-álgebra de los conjuntos borelianos en $\mathbb{R}$, la cual denotaremos por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Así que, para cada $t \in \Gamma$, X_t será una variable aleatoria real.

Para cada $t \in \Gamma$, X_t representa lo que llamaremos el estado del proceso en el tiempo t. Este estado no está determinado, puede ser uno cualquiera de los valores que toma X_t. Lo único conocido es la ley probabilística mediante la cual evoluciona el proceso, la cual, en particular, nos dice cuál es la distribución de X_t. Esta distribución no es más que una medida de probabilidad definida sobre la σ-álgebra generada por X_t, cuyos elementos son aquellos eventos que dependen únicamente del estado del proceso en el tiempo t, a saber, todos los de la forma $[X_t \in B]$, donde $B \in \mathcal{E}$.

De manera más general, resulta de interés considerar, para cada $t \in \Gamma$, la σ-álgebra formada por todos aquellos eventos que dependen únicamente del estado del proceso, desde su inicio, hasta el tiempo t, es decir, la σ-álgebra generada por la familia de variables aleatorias $\{X_s : s \in \Gamma \text{ y } s \leq t\}$. Esta familia es no decreciente en el sentido de que si $t_1, t_2 \in \Gamma$ y $t_1 < t_2$ entonces $\sigma\{X_s : s \in \Gamma \text{ y } s \leq t_1\} \subset \sigma\{X_s : s \in \Gamma \text{ y } s \leq t_2\}$. Una familia de este tipo será llamada una filtración.

Definición 46. *Una **filtración** $\{\Im_t : t \in \Gamma\}$ de $(\Omega, \Im)$ es una familia de σ-álgebras tales que $\Im_t \subset \Im$ para cualquier $t \in \Gamma$ y si $s, t \in \Gamma$ son tales que $s < t$, entonces $\Im_s \subset \Im_t$. Denotaremos por $\Im_{\infty-}$ a la σ-álgebra generada por los eventos que pertenecen a $\Im_t$ para alguna $t \in \Gamma$.*

Definición 47. *Diremos que una filtración $\{\Im_t : t \in \Gamma\}$ es completa si, para cualquier $t \in \Gamma$, todos los eventos de probabilidad cero pertenecen a $\Im_t$.*

Definición 48. *Diremos que un proceso estocástico $(X_t)_{t\in\Gamma}$ está adaptado a la filtración $\{\Im_t : t \in \Gamma\}$ si, para cualquier $t \in \Gamma$, la variable aleatoria X_t es $\Im_t$-medible.*

Definición 49. *Si $(X_t)_{t\in\Gamma}$ es un proceso estocástico y $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ es un subconjunto finito de Γ, la distribución del vector aleatorio $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ será llamada una distribución finito dimensional del proceso.*

Recordemos que la distribución de un vector aleatorio $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, formado por variables aleatorias reales; es el conjunto de probabilidades de la forma $P[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in B]$, donde B es un conjunto boreliano de $\mathbb{R}^n$. Estas probabilidades quedan determinadas por las probabilidades de la forma $P[X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_n \in B_n]$, donde $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$. Utilizando funciones en lugar de conjuntos, la distribución de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ queda determinada por el conjunto de esperanzas de la forma $E[f_1(X_1) f_2(X_2) \cdots f_n(X_n)]$, donde $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funciones medibles y acotadas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Martingalas

El concepto de martingala fue introducido por Jean Ville, en su libro titulado *Étude critique de la notion de collectif*, publicado en 1939. En ese libro, Ville se avocó al análisis de la definición de probabilidad de un evento que dio Richard E. Von Mises, en 1931, como valor límite de la frecuencia relativa con la que ocurre el evento dentro de un colectivo de realizaciones del correspondiente experimento aleatorio. Esta definición no fue adoptada por las inconsistencias que tiene, pero dio pie a la profundización del concepto de probabilidad. En su definición, Von Mises impone la condición de que, en las repeticiones del experimento, los resultados se presentan en "sucesión irregular". Fue sobre este punto que Ville realizó su estudio ya que consideró que Von Mises no precisaba bien lo que eso significaba. Decía Von Mises: .Es e segundo axioma, que debe expresar el carácter aleatorio de los fenómenos considerados, es el axioma de irregularidad o principio de la imposibilidad de encontrar un sistema de juego". Von Mises se refería a la imposibilidad de encontrar una estrategia, en un juego aleatorio, que hiciera ganar con seguridad. Lo que hizo Ville fue expresar la condición de irregularidad a la que se refería Von Mises en términos del concepto de martingala que introdujo en su libro. Su definición únicamente difiere en notación de la definición moderna.

Para definir el concepto de martingala o "juego justo", como también lo denominaba Ville, considera una sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, S_n es una función de $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Decía entonces que la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será llamada una martingala si, para cada $n \in \mathbb{N}$, la esperanza condicional de S_n, conocidos los valores de $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$, es igual a S_{n-1}. Esta definición la extendió Ville al caso de un proceso estocástico en tiempo continuo. Dice Ville en su libro, como introducción a la definición de martingala:

Çonsideremos el juego siguiente: un jugador A apuesta una suma igual a 1, contra la promesa de recibir la cantidad $s_1(X_1)$ des\-pués de la determinación de X_1, o $s_2(X_1, X_2)$ después de la determinación de X_1 y X_2, ..., o $s_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ después de la determinación de X_1, X_2, ..., X_n, etcétera, estando entendido que A es libre de interrumpir el juego cuando le plazca, es decir, de tomar, después de una partida cualquiera, la cantidad convenida y mantener su posesión definitiva. ¿Bajo que condiciones este juego es justo?

La respuesta intuitiva a esta pregunta es la siguiente: después de cada partida, la esperanza matemática del jugador, relativa a las partidas que seguirán, debe ser igual al valor de la cantidad que posee en el instante considerado, y eso independientemente de la estrategia que él se proponga seguir, inspirándose por ejemplo en los resultados de las partidas ya jugadas."

La teoría de las martingalas se encuentra actualmente en el centro de la teoría de los procesos estocásticos. Esto se debe mucho al desarrollo de esta teoría que hizo Doob en su libro *Stochastic processes* (1953) y a la importancia que el mismo Doob hizo ver de esta teoría.

Previamente, Lévy, en su libro *Processus stochastiques et mouvement brownien* (1948), trabajó con martingalas y demostró uno de los más célebres resultados de la teoría de los procesos estocásticos:

En la segunda parte de su libro, Lévy estudió el problema de la suma de variables aleatorias no independientes, sino encadenadas. En esa parte demostró el siguiente resultado, enunciado aquí en su formulación moderna: Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso estocástico fuertemente continuo tal que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ y $(X_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, son martingalas, entonces $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ tiene las propiedades que caracterizan al proceso de Wiener.

El desarrollo más importante de la teoría de las martingalas y submartingalas lo hizo Doob en el libro citado arriba. Ahí demostró las principales propiedades de las martingalas y las submartingalas, tanto en tiempo discreto como en tiempo continuo; la formulación moderna de esas propiedades es básicamente la que hizo Doob en su libro. Estas propiedades se pueden dividir en tres grandes categorías: las que tienen que ver con la conservación de la propiedad de martingala o submartingala al sustituir los tiempos fijos por tiempos aleatorios, ahora llamados tiempos opcionales; las que se refieren a algunas desigualdades que se satisfacen y que son la base para la tercera categoría de resultados, los teoremas de convergencia. Esto además de demostrar, en el caso de tiempo continuo, la existencia de versiones con trayectorias continuas por la derecha y con límites por la izquierda de las martingalas o semimartingalas, lo cual, en palabras de Paul Meyer y Claude Dellacherie, .$^{\text{es}}$ quizá el resultado más importante de toda la teoría de procesos estocásticos en tiempo continuo". Mostró además algunas aplicaciones importantes de esta teoría.

Definición 50. *Dado un conjunto de índices $\Gamma \subset \mathbb{R}$ y una filtración $\{\Im_t : t \in \Gamma\}$, se dice que un proceso $(X_t)_{t\in\Gamma}$ es una* ***martingala*** *(resp.* ***supermartingala****,* ***submartingala****) con respecto a la filtración $\{\Im_t : t \in \Gamma\}$ si se satisfacen las siguientes tres propiedades:*

1. *El proceso $(X_t)_{t\in\Gamma}$ está adaptado a la filtración $\{\Im_t : t \in \Gamma\}$.*
2. *$E\left[|X_t|\right] < \infty$ para cualquier $t \in \Gamma$.*
3. *Dados $s, t \in \Gamma$, con $s < t$, se tiene $E\left[M_t \mid \Im_s\right] = M_s$ (resp. $E\left[M_t \mid \Im_s\right] \leq M_s$, $E\left[M_t \mid \Im_s\right] \geq M_s$).*

La siguiente proposición y el corolario que le sigue son propiedades muy importantes de las martingalas.

Proposición 1. *Sea* $\Gamma \subset [0,\infty)$ *un conjunto de índices ,* $\{\Im_t : t \in \Gamma\}$ *una filtración y* $(M_t)_{t\in\Gamma}$ *una martingala con respecto a la filtración* $\{\Im_t : t \in \Gamma\}$*. Entonces, para cualesquiera* $r, s, t \in \Gamma$ *tales que* $r \leq s \leq t$*, se tiene:*

$$E\left[(M_t - M_r)^2 \mid \Im_s\right] = E\left[M_t^2 - M_s^2 \mid \Im_s\right] + (M_s - M_r)^2$$

Demostración

$$E\left[(M_t - M_r)^2 \mid \Im_s\right]$$

$$= E\left[(M_t - M_s)^2 + (M_s - M_r)^2 + 2\,(M_t - M_s)\,(M_s - M_r) \mid \Im_s\right]$$

$$= E\left[(M_t - M_s)^2 + 2M_tM_s - 2M_s^2 - 2M_r\,(M_t - M_s) \mid \Im_s\right] + (M_s - M_r)^2$$

$$= E\left[M_t^2 - M_s^2 \mid \Im_s\right] - 2M_rE\left[M_t - M_s \mid \Im_s\right] + (M_s - M_r)^2$$

$$= E\left[M_t^2 - M_s^2 \mid \Im_s\right] + (M_s - M_r)^2$$

■

Corolario 1. *Sea* $\Gamma \subset [0,\infty)$ *un conjunto de índices ,* $\{\Im_t : t \in \Gamma\}$ *una filtración y* $(M_t)_{t\in\Gamma}$ *una martingala con respecto a la filtración* $\{\Im_t : t \in \Gamma\}$*. Entonces, para cualquier pareja de puntos* $s, t \in \Gamma$ *tales que* $s < t$*, se tiene:*

$$E\left[(M_t - M_s)^2 \mid \Im_s\right] = E\left[M_t^2 - M_s^2 \mid \Im_s\right]$$

■

Propiedades del proceso de Wiener

Teorema 20. *1. El proceso de Wiener $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala con respecto a la filtración $\{\Im_t = \sigma(\{W_u : u \leq t\}) : t \in \mathbb{R}^+\}$.*

2. el proceso $(W_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala con respecto a la filtración $\{\Im_t = \sigma(\{W_u : u \leq t\}) : t \in \mathbb{R}^+\}$.

Demostración

Recordemos que las propiedades que caracterizan al proceso de Wiener, $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, son las siguientes:

i) $W_0 = 0$.

ii) Si $0 < t_1 < \cdots < t_n$, entonces las variables aleatorias W_{t_1}, $W_{t_2} - W_{t_1}$, ..., $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son independientes.

iii) Si $0 \leq s < t$, entonces la variable aleatoria $W_t - W_s$ tiene distribución normal de parámetros $\mu = 0$ y $\sigma^2 = t - s$.

iv) $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso continuo.

De manera que si $s, t \in \mathbb{R}^+$ son tales que $s < t$, y $s_1, s_2, \ldots s_n$ son números reales no negativos menores o iguales a s y ordenados del menor al mayor, entonces el incremento $W_t - W_s$ es independiente de la familia de variables aleatorias $X_{s_1}, X_{s_2-s_1}, X_{s_3-s_2}, \ldots, X_{s_n-s_{n-1}}$ y, por lo tanto, también es independiente de la familia $X_{s_1}, X_{s_2}, \ldots, X_{s_n}$. Así que, como la σ-álgebra $\sigma(\{W_u : u \leq s\})$ está generada por los conjuntos de la forma $[X_{s_1} \in B_1, X_{s_2} \in B_2, \ldots, X_{s_n} \in B_n]$, donde $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, se concluye que $W_t - W_s$ es independiente de la σ-álgebra $\sigma(\{W_u : u \leq s\})$.

Por lo tanto:

$$E[W_t - W_s \mid \Im_s] = E[W_t - W_s] = 0$$

Es decir:

$$E[W_t \mid \Im_s] = W_s$$

Por lo tanto, $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala con respecto a la filtración $\{\Im_t : t \in \mathbb{R}^+\}$.

2.

$E\left[(W_t - W_s)^2 \mid \Im_s\right] = E\left[W_t^2 - 2W_sW_t + W_s^2 \mid \Im_s\right]$

$= E\left[W_t^2 + W_s^2 \mid \Im_s\right] - 2E\left[W_sW_t \mid \Im_s\right] = E\left[W_t^2 + W_s^2 \mid \Im_s\right] - 2W_s^2$

$= E\left[W_t^2 - W_s^2 \mid \Im_s\right]$

Por lo tanto:

$$E\left[W_t^2 - W_s^2 \mid \Im_s\right] = E\left[\left(W_t - W_s\right)^2 \mid \Im_s\right] = E\left[\left(W_t - W_s\right)^2\right] = t - s$$

Así que:

$$E\left[W_t^2 - t \mid \Im_s\right] = W_s^2 - s$$

Es decir, el proceso $\left(W_t^2 - t\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala con respecto a la filtración $\{\Im_t : t \in \mathbb{R}^+\}$.

$\blacksquare$

Teorema 21. $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^n \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2 = b - a$ *en* L^2

donde $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ *es una partición del intervalo* $[a, b]$.

Demostración

Recuérdese que si X es una variable aleatoria con distribución normal de esperanza 0 y varianza σ^2, entonces $E\left[X^{2m}\right] = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)\sigma^{2m}$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

Sea $\Delta_k = \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2$. Se tiene entonces,

$E\left[\Delta_k\right] = t_k - t_{k-1}$

$V\left[\Delta_k\right] = E\left[\left(\Delta_k\right)^2\right] - \left(E\left[\Delta_k\right]\right)^2 = E\left[\left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^4\right] - \left(t_k - t_{k-1}\right)^2$

$= 3\left(t_k - t_{k-1}\right)^2 - \left(t_k - t_{k-1}\right)^2 = 2\left(t_k - t_{k-1}\right)^2$

Por lo tanto,

$E\left[\sum_{k=1}^n \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2\right] = E\left[\sum_{k=1}^n \Delta_k\right] = \sum_{k=1}^n \left(t_k - t_{k-1}\right) = b - a$

Además, como Δ_1, Δ_2, …, Δ_n son variables aleatorias independientes,

$E\left[\left(\sum_{k=1}^n \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2 - (b-a)\right)^2\right] = V\left[\sum_{k=1}^n \Delta_k\right] = \sum_{k=1}^n V\left[\Delta_k\right]$

$= 2\sum_{k=1}^n \left(t_k - t_{k-1}\right)^2 \leq 2\|P\| \sum_{k=1}^n \left(t_k - t_{k-1}\right) = 2(b-a)\|P\|$

Por lo tanto:

$$\lim_{\|P\|\to 0} E\left[\left(\sum_{k=1}^n \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2 - (b-a)\right)^2\right] = 0$$

$\blacksquare$

Al límite $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2$ se le llama la **variación cuadrática de** (W_t) en el intervalo $[a, b]$.

Corolario 2. *Las trayectorias del proceso de Wiener no son de variación acotada.*

El hecho de que las trayectorias del proceso de Wiener no sean de variación acotada se refleja en problemas del siguiente tipo:

Proposición 2.

1. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}(P) \sum_{k=1}^{n} W_{t_{k-1}} \left[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right] = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$
2. $\lim\limits_{\|P\|\to 0}(P) \sum_{k=1}^{n} W_{t_k} \left[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right] = \frac{1}{2}W_t^2 + \frac{1}{2}t$

donde $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ es una partición del intervalo $[0, t]$.

Demostración

$\sum_{k=1}^{n} W_{t_{k-1}} \left[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[W_{t_{k-1}} W_{t_k} - W_{t_{k-1}}^2\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} 2W_{t_{k-1}} W_{t_k} - \sum_{k=1}^{n} W_{t_{k-1}}^2 - \sum_{k=1}^{n} W_{t_{k-1}}^2\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} 2W_{t_{k-1}} W_{t_k} - \sum_{k=1}^{n} W_{t_{k-1}}^2 - \sum_{k=1}^{n} W_{t_k}^2 + W_t^2\right]$

$= \frac{1}{2}\left[W_t^2 - \sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2\right] = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2$

Por lo tanto:

$\lim\limits_{\|P\|\to 0}(P) \sum_{k=1}^{n} W_{t_{k-1}} \left[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right]$

$= \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}\lim\limits_{\|P\|\to 0}(P) \sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2 = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$

$\sum_{k=1}^{n} W_{t_k} \left[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[W_{t_k}^2 - W_{t_k} W_{t_{k-1}}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[- \sum_{k=1}^{n} 2W_{t_{k-1}} W_{t_k} + \sum_{k=1}^{n} W_{t_k}^2 + \sum_{k=1}^{n} W_{t_k}^2\right]$

$= \frac{1}{2}\left[- \sum_{k=1}^{n} 2W_{t_{k-1}} W_{t_k} + \sum_{k=1}^{n} W_{t_k}^2 + \sum_{k=1}^{n} W_{t_{k-1}}^2 + W_t^2\right]$

$= \frac{1}{2}\left[W_t^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2\right] = \frac{1}{2}W_t^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2$

Por lo tanto,

$\lim_{\|P\|\to 0}(P)\sum_{k=1}^{n} W_{t_k}\left[W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right]$

$= \frac{1}{2}W_t^2 + \frac{1}{2}\lim_{\|P\|\to 0}(P)\sum_{k=1}^{n}\left(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}\right)^2 = \frac{1}{2}W_t^2 + \frac{1}{2}t$

■

Como puede verse, los dos límites de la proposición anterior son distintos por el hecho de que la variación cuadrática de (W_t) es distinta de cero.

En todo lo que sigue consideraremos como filtración a la familia de σ-álgebras

$$\{\Im_t = \sigma\left(\{W_u : u \leq t\}\right) : t \in \mathbb{R}^+\}.$$

La integral de Ito se define primero para una familia de procesos simples y después se extiende a otro tipo de procesos tomando límites:

Se comienza con procesos de la forma $H_t(\omega) = I_{(a,b]\times F}(t,\omega)$, donde $F \in \Im_a$, para los cuales se define:

$\int H_s dW_s = (W_b - W_a)I_F$

$\int_0^t H_s dW_s = \int H_s I_{[0,t]}(s) dW_s$ para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$

De manera que se tiene:

$$\int_0^t H_s dW_s = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ (W_t - W_a)I_F & \text{si } a < t \leq b \\ (W_b - W_a)I_F & \text{si } t > b \end{cases}$$

Definiendo, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $N_t = \int_0^t H_s dW_s$, se tienen las siguientes propiedades:

1. $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua nula en cero.

2. $\left(N_t^2 - \int_0^t H_s^2 ds\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua nula en cero.

El siguiente paso consiste en definir la integral para un proceso del tipo $Z_t(\omega) = \sum_{k=1}^{m} c_k H_t^{(k)}(\omega)$, donde $c_1, c_2, \ldots, c_m$ son constantes y, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $H_t^{(k)}(\omega) = I_{(a_k,b_k]\times F_k}(t,\omega)$, donde $F_k \in \Im_{a_k}$. Para un proceso de este tipo se define:

$$\int_0^t Z_s dW_s = \sum_{k=1}^{m} c_k \int_0^t H_s^{(k)} dW_s$$

Aquí se requiere verificar que esta definición no depende de la representación particular de Z como una suma de la forma $\sum_{k=1}^{m} c_k H^{(k)}$. Una vez verificado esto, definiendo $N_t = \int_0^t Z_s dW_s$, se tienen las siguientes propiedades:

1. $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua nula en cero.
2. $\left(N_t^2 - \int_0^t Z_s^2 ds\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua nula en cero.

En particular, como el proceso $\left(N_t^2 - \int_0^t Z_s^2 ds\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala nula en cero, se tiene, para cada $t \in \mathbb{R}^+$:

$$E\left[N_t^2\right] = E\left[\int_0^t Z_s^2 ds\right]$$

Esto define una isometría entre dos espacios L^2, la cual permite extender la integral estocástica a todos los procesos que se puedan aproximar mediante procesos del tipo de los procesos $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ definidos arriba. La integral estocástica queda así definida para una familia bastante amplia de procesos, la cual incluye a todos los procesos continuos $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ tales que $E\left[\int_0^t Z_s^2 ds\right] < \infty$ para toda $t \in \mathbb{R}^+$.

La σ-álgebra previsible

Definición 51. *Si $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $a < b$, definamos $(a, b|$ de la siguiente manera:*

$$(a,b| = \begin{cases} (a,b] & \text{si } b \in \mathbb{R}^+ \\ (a,b) & \text{si } b = \infty \end{cases}$$

Definición 52. *Entenderemos por un rectángulo de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ un conjunto de la forma $(s,t| \times F$ ó $\{0\} \times F$, donde $s, t \in \overline{\mathbb{R}}^+$, $s < t$ y $F \in \Im$. Diremos que el rectángulo $(s,t| \times F$ (resp. $\{0\} \times F$) está adaptado a la filtración $\left\{\Im_t : t \in \overline{\mathbb{R}}^+\right\}$ si $F \in \Im_s$ (resp. $F \in \Im_0$). Denotaremos por $\mathcal{R}$ a la familia de rectángulos adaptados y por $\mathcal{A}$ a la familia de conjuntos de la forma $\bigcup_{j=1}^{n} E_j$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $E_1, \ldots, E_n$ son rectángulos en $\mathcal{R}$, ajenos por parejas.*

Se tiene:

i) $\emptyset \in \mathcal{R}$

ii) Si $E_1, E_2 \in \mathcal{R}$, entonces $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{R}$.

iii) Si $E \in \mathcal{R}$, entonces $E^c \in \mathcal{A}$.

Por lo tanto, $\mathcal{R}$ es un π-sistema y $\mathcal{A}$ es un álgebra de subcontuntos de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$.

Obsérvese que si $E \in \mathcal{R}$, entonces el proceso $(X_u)_{u \in \mathbb{R}^+}$ definido por $X_u(\omega) = I_E(u, \omega)$ es continuo por la izquierda y está adaptado.

Definición 53. *La σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ será llamada la σ-álgebra previsible y la denotaremos por $\mathcal{P}$.*

Definición 54. *Diremos que un proceso estocástico $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ es previsible si la función $X : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$, definida por $X(t, \omega) = X_t(\omega)$, es $\mathcal{P}$-medible.*

Si $C \in \mathcal{P}$, denotaremos por $(C_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ al proceso estocástico definido por:

$$C_t(\omega) = I_C(t, \omega)$$

Para cada $t \in \mathbb{R}^+$ y $C \in \mathcal{P}$, definamos:

$$\mu_t (C) = E\left[\int_0^t C_s ds\right]$$

Proposición 3. *Para cada $t \in \mathbb{R}^+$, μ_t es una medida finita definida sobre $\mathcal{P}$.*

Demostración

Si $C = \emptyset$, entonces $E\left[\int_0^t C_s ds\right] = 0$; es decir $\mu_t (\emptyset) = 0$.

Si $C = \mathbb{R}^+ \times \Omega$, entonces $C_s (\omega) = I_C (s, \omega) = 1$ para cualquier $\omega \in \Omega$ y $s \in [0, t]$; así que:

$$\int_0^t C_s (\omega) \, ds = t \text{ para cualquier } \omega \in \Omega$$

Por lo tanto:

$$\mu_t (\mathbb{R}^+ \times \Omega) = t < \infty$$

Demostremos ahora que μ_t es σ-aditiva.

Sea $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{P}$, ajenos por parejas.

Para cada $\omega \in \Omega$, se tiene:

$\int_0^t (\cup_{k=1}^n C_k)_s (\omega) \, ds = \int_0^t I_{\cup_{k=1}^n C_k} (s, \omega) \, ds = \int_0^t \sum_{k=1}^n I_{C_k} (s, \omega) \, ds$

$= \sum_{k=1}^n \int_0^t I_{C_k} (s, \omega) \, ds = \sum_{k=1}^n \int_0^t (C_k)_s (\omega) \, ds$

Así que, por el teorema de convergencia monótona, se tiene:

$\mu_t (\cup_{k=1}^\infty C_k) = E\left[\int_0^t (\cup_{k=1}^\infty C_k)_s \, ds\right] = E\left[\lim_{n\to\infty} \int_0^t (\cup_{k=1}^n C_k)_s \, ds\right]$

$= \lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{k=1}^n \int_0^t (C_k)_s \, ds\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n E\left[\int_0^t (C_k)_s \, ds\right]$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \mu_t (C_k) = \sum_{k=1}^\infty \mu_t (C_k)$

Por lo tanto, μ_t es σ-aditiva.

$\blacksquare$

Proposición 4. *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso previsible no negativo y $(A_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso no decreciente y adaptado, entonces, para cualquier $t\in\mathbb{R}^+$, $\int_0^t X_s dA_s$ es $\Im_t$-medible.*

Demostración

Definamos:

$$\mathcal{K}=\left\{C\in\mathcal{P}:\int_0^\infty C_s I_{[0,t]}(s)\,dA_s \text{ es } \Im_t\text{-medible para cualquier } t\in\mathbb{R}^+\right\}$$

Para los conjuntos $C\in\mathcal{R}$, se tiene:

Si $C=\{0\}\times F$, con $F\in\Im_0$:

$\int_0^\infty C_s(\omega)\,I_{[0,t]}(s)\,dA_s(\omega)=I_F(\omega)\int_0^t I_{\{0\}}(s)\,I_{[0,t]}(s)\,dA_s(\omega)=0$ para cualquier $\omega\in\Omega$.

Si $C=(a,b]\times F$, con $F\in\Im_a$, donde a y b son números reales no negativos tales que $a<b$, se tiene, para cualquier $\omega\in\Omega$:

$\int_0^\infty C_s(\omega)\,I_{[0,t]}(s)\,dA_s(\omega)=I_F(\omega)\int_0^\infty I_{(a,b]}(s)\,I_{[0,t]}(s)\,dA_s(\omega)$

$$=\begin{cases}0 & \text{si } 0\le t\le a\\ I_F(\omega)\int_0^\infty I_{(a,t]}(s)\,dA_s(\omega) & \text{si } a<t\le b\\ I_F(\omega)\int_0^\infty I_{(a,b]}(s)\,dA_s(\omega) & \text{si } t>b\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & \text{si } 0\le t\le a\\ I_F(\omega)\,(A_t-A_a) & \text{si } a<t\le b\\ I_F(\omega)\,(A_b-A_a) & \text{si } t>b\end{cases}$$

Así que, en cualquier caso, $C\in\mathcal{K}$. Por lo tanto, $\mathcal{R}\subset\mathcal{K}$.

Probaremos ahora que $\mathcal{K}$ forma un d-sistema.

i) $[0,\infty)\times\Omega\in\mathcal{K}$

En efecto, si $C=[0,\infty)\times\Omega$, entonces:

$\int_0^\infty C_s(\omega)\,I_{[0,t]}(s)\,dA_s(\omega)=\int_0^\infty I_{[0,\infty)}(s)\,I_{[0,t]}(s)\,dA_s(\omega)=A_t(\omega)$ para cualquier $\omega\in\Omega$.

ii) $\mathcal{K}$ es cerrada bajo diferencias propias.

En efecto, si D y E pertenecen a $\mathcal{K}$ y $D\subset E$, entonces, definiendo $C=E-D$, se tiene, para cualquier $\omega\in\Omega$:

$C_s(\omega)=I_C(s,\omega)=I_{E-D}(s,\omega)=I_E(s,\omega)-I_D(s,\omega)=E_s(\omega)-D_s(\omega)$, así que, para cualquier $t\in\mathbb{R}^+$:

$$C_s(\omega) I_{[0,t]}(s) = E_s(\omega) I_{[0,t]}(s) - D_s(\omega) I_{[0,t]}(s)$$

Por lo tanto:

$\int_0^\infty C_s(\omega) I_{[0,t]}(s)\, dA_s(\omega) = \int_0^\infty (E_s(\omega) - D_s(\omega)) I_{[0,t]}(s)\, dA_s(\omega)$
$= \int_0^\infty E_s(\omega) I_{[0,t]}(s)\, dA_s(\omega) - \int_0^\infty D_s(\omega) I_{[0,t]}(s)\, dA_s(\omega)$
Así que $E - D = C \in \mathcal{K}$.

iii) $\mathcal{K}$ es cerrada bajo uniones monótonas numerables.

En efecto, si $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona no decreciente de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{K}$, entonces:

$$\int_0^\infty (B_k)_s\, I_{[0,t]}(s)\, dA_s \text{ es } \Im_t\text{-medible para cualquier } t \in \mathbb{R}^+$$

Definamos $B = \cup_{k=1}^\infty B_k$, entonces $\text{lím}_{k\to\infty} I_{B_k} = I_B$, así que, para cualquier $\omega \in \Omega$, utilizando el teorema de la converencia monótona, se tiene:

$$\int_0^\infty I_B(s,\omega) I_{[0,t]}(s)\, dA_s(\omega) = \int_0^\infty \text{lím}_{k\to\infty} I_{B_k}(s,\omega) I_{[0,t]}(s)\, dA_s(\omega) = \\ \text{lím}_{k\to\infty} \int_0^\infty I_{B_k}(s,\omega) I_{[0,t]}(s)\, dA_s(\omega)$$

Por lo tanto, $\int_0^\infty I_B(s,\omega) I_{[0,t]}(s)\, dA_s(\omega)$ es $\Im_t$-medible para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$. Así que $B \in \mathcal{K}$.

$\mathcal{K}$ es entonces un d-sistema que contiene al π-sistema $\mathcal{D}$, así que, por el teorema de clases monótonas para π-sistemas:

$$\mathcal{P} = \sigma(\mathcal{R}) = d(\mathcal{R}) \subset \mathcal{K}$$

Consideremos ahora una función simple $\mathcal{P}$-medible, $\varphi = \sum_{k=1}^m b_k I_{C_k}$, donde $b_1, \ldots, b_m$ son números reales y $C_1, \ldots, C_m$ son elementos de $\mathcal{P}$.

Para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$\int_0^t \varphi_s dA_s = \int_0^t \varphi_s dA_s = \int_0^t \sum_{k=1}^m b_k (C_k)_s\, dA_s = \sum_{k=1}^m b_k \int_0^t (C_k)_s\, dA_s$
Así que, $\int_0^t \varphi_s dA_s$ es $\Im_t$-medible.

Finalmente, si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un proceso previsible no negativo, consideremos una sucesión no decreciente de funciones simples no negativas $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que:

$$X = \text{lím}_{n\to\infty} \varphi_n$$

Entonces, por el teorema de la convergencia monótona, para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_0^t X_s dA_s = \text{lím}_{n\to\infty} \int_0^t (\varphi_n)_s \, dA_s$$

Así que $\int_0^t X_s dA_s$ es $\Im_t$-medible.

■

Definición 55. *Diremos que una función $Z : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ es* ***elemental*** *si tiene la forma $Z = \sum_{k=1}^m b_k I_{E_k}$, donde $b_1, \dots, b_m$ son números reales y $E_1, \dots, E_m$ son elementos de $\mathcal{R}$. En ese caso, el proceso $(Z_u)_{u\in\mathbb{R}^+}$ definido por $Z_u(\omega) = Z(u, \omega)$ también será llamado elemental.* ***El conjunto de procesos elementales será denotado por $\mathcal{E}$.***

Obviamente, todo proceso elemental es previsible.

Como $\mathcal{R}$ es un π-sistema, el producto de dos funciones elementales es una función elemental. En particular, como $I_{[0,t]\times\Omega} = I_{\{0\}\times\Omega} + I_{(0,t]\times\Omega}$ es elemental para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, si Z es una función elemental y $t \in \mathbb{R}^+$, entonces la función $ZI_{[0,t]\times\Omega}$, la cual denotaremos simplemente por $ZI_{[0,t]}$, es una función elemental.

También I_A es una función elemental para cualquier $A \in \mathcal{A}$.

Obviamente, el conjunto de funciones elementales es cerrada bajo sumas y multiplicación por un número real, así que forma un espacio vectorial.

Si $Z = \sum_{k=1}^m b_k I_{E_k}$ es una función elemental y $\{d_1, \dots, d_n\}$ es el conjunto formado por todos los distintos posibles valores no nulos de Z, definamos, para $k \in \{1, \dots, n\}$, $D_k = \{(t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega : Z(t, \omega) = d_k\}$, entonces los conjuntos $D_1, \dots, D_n$ son ajenos por parejas y $Z = \sum_{k=1}^n d_k I_{D_k}$. Esta última expresión será llamada la **representación canónica** de Z. Además, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $D_k \in \mathcal{A}$.

En efecto:

Denotemos por Γ a la familia de subconjuntos no vacíos de $\{1, 2, \dots, m\}$. Para cada $U \in \Gamma$, sea $E^{(U)} = \bigcap_{k=1}^m G_k$, donde $G_k = E_k$ si $k \in U$ y $G_k = E_k^c$ si $k \notin U$. Obviamente, si U y V son dos conjuntos distintos que pertenecen a Γ, entonces $E^{(U)} \cap E^{(V)} = \emptyset$.

Sea Γ' la familia de conjuntos U en Γ para los cuales $E^{(U)} \neq \emptyset$. Entonces, $\bigcup_{\{U\in\Gamma'\}} E^{(U)} = \bigcup_{k=1}^m E_k$, así que, si, para cada $U \in \Gamma'$, definimos $S^{(U)} = \sum_{\{k\in U\}} b_k$, entonces:

$$Z = \sum_{\{U\in\Gamma'\}} S^{(U)} I_{E^{(U)}}$$

Como los conjuntos de la familia $\left\{E^{(U)} : U \in \Gamma'\right\}$ son ajenos por parejas, se tiene entonces, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$D_k = \bigcup_{\left\{U \in \Gamma' : S^{(U)} = d_k\right\}} E^{(U)}$$

Finalmente, por las propiedades de $\mathcal{R}$ demostradas antes, si $U \in \Gamma'$, entonces $D^{(U)}$ es una unión finita de elementos de $\mathcal{R}$, ajenos por parejas. Por lo tanto, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $D_k \in \mathcal{A}$.

Una función elemental Z tiene también las siguientes representaciones:

1) $Z = \sum_{k=1}^{n} c_k I_{C_k}$, donde $c_1, \ldots, c_n$ son números reales y $C_1, \ldots, C_n$ son elementos de $\mathcal{R}$ ajenos por parejas. En este caso, los coeficientes $c_1, \ldots, c_n$ no necesariamente son distintos entre sí.

En efecto, si Z es una función elemental y $Z = \sum_{k=1}^{m} d_k I_{D_k}$, es la representación canónica de Z, entonces, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $D_k = \cup_{r=1}^{m_k} E_r^{(k)}$, donde los conjuntos $E_r^{(k)}$ $(r \in \{1, 2, \ldots, m_k\})$ pertenecen a $\mathcal{R}$ y son ajenos por parejas. Así que:

$$Z = \sum_{k=1}^{m} d_k \sum_{r=1}^{m_k} I_{E_r^{(k)}} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{m_k} d_k I_{E_r^{(k)}}$$

2) $Z = a_0 I_{\{0\} \times G_0} + \sum_{k=1}^{n} a_k I_{(t_{k-1}, t_k] \times G_k} + a_{n+1} I_{(t_n, t_{n+1}) \times G_{n+1}}$, donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ son números reales, $t_0, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$ y $0 = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n < t_{n+1} = \infty$, $G_0 \in \mathcal{F}_0$ y, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $G_k \in \mathcal{F}_{t_{k-1}}$. En este caso alguno(s) de los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ pueden ser iguales a cero.

En efecto, si $Z = \sum_{j=1}^{m} c_j I_{C_j}$ es una función elemental, donde $c_1, \ldots, c_m$ son números reales y $C_1, \ldots, C_m$ son elementos de $\mathcal{R}$ ajenos por parejas, entonces, cada conjunto C_j, con $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, tiene la forma $(u_j, v_j| \times F_j$, con $F_j \in \Im_{s_j}$, ó $\{0\} \times F_j$, con $F_j \in \Im_0$.

Si ninguno de los conjuntos $C_1, \ldots, C_m$ tiene la forma $\{0\} \times F$, con $F \in \Im_0$, definamos $a_0 = 0$ y $G_0 = \Omega$; en otro caso definamos:

$G_0 = \bigcup_{\{j \in \{1,2,\ldots,m\} : C_j = \{0\} \times F_j\}} F_j$ y $a_0 = \sum_{\{j \in \{1,2,\ldots,m\} : C_j = \{0\} \times F_j\}} c_j$

Si ninguno de los conjuntos $C_1, \ldots, C_m$ tiene la forma $(u, v| \times F$, con $F \in \Im_s$, definamos $t_0 = 0$, $t_1 = \infty$, $a_1 = 0$ y $G_1 = \Omega$. Entonces:

$$Z = a_0 I_{\{0\} \times G_0} + a_1 I_{(t_0, t_1) \times G_1}$$

En otro caso, definamos:

$$B = \bigcup_{\{j \in \{1,2,\ldots,m\} : C_j = (u_j, v_j| \times F_j\}} \{u_j, v_j\} \cup \{0, \infty\}$$

Sean $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}$ los elementos de B, ordenados del menor al mayor.

Sea $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $C_j = (u_j, v_j| \times F_j$, con $F_j \in \Im_{s_j}$. Entonces, como u_j y v_j pertenecen a B y t_{k-1}, t_k son elementos consecutivos de B, si $(t_{k-1}, t_k| \cap (u_j, v_j| \neq \emptyset$, ni u_j ni v_j pertenecen al intervalo (t_{k-1}, t_k), así que $u_j \leq t_{k-1} < t_k \leq v_j$; por lo tanto, $(t_{k-1}, t_k| \subset (u_j, v_j|$.

Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, definamos:

$G_k = \bigcup_{\{j \in \{1,2,\ldots,m\} : C_j = (u_j, v_j| \times F_j \text{ y } (t_{k-1}, t_k| \subset (u_j, v_j|\}} F_j$

$a_k = \sum_{\{j \in \{1,2,\ldots,m\} : C_j = (u_j, v_j| \times F_j \text{ y } (t_{k-1}, t_k| \subset (u_j, v_j|\}} c_j$

Entonces, $G_k \in F_{t_{k-1}}$ y se tiene:

$$Z = a_0 I_{\{0\} \times G_0} + \sum_{k=1}^{n} a_k I_{(t_{k-1}, t_k] \times G_k} + a_{n+1} I_{(t_n, t_{n+1}) \times G_{n+1}}$$

Si μ es una medida definida sobre $\mathcal{P}$, denotaremos por $L^2_{\mathcal{P}}(\mu)$ al espacio $L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu)$.

Lema 1. *Supongamos que μ es una medida finita definida sobre $\mathcal{P}$. Entonces, para cualquier $E \in \mathcal{P}$, I_E es límite en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu)$ de elementos en $\mathcal{E}$.*

Demostración

Observemos que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión no decreciente y uniformemente acotada de funciones no negativas $\mathcal{P}$-medibles, entonces $f = \lim_{n \rightsquigarrow \infty} f_n$ es acotada y, como $|f_n - f| = f - f_n \leq f$, entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en $\mathcal{L}^2_{\mathcal{P}}(\mu)$.

Sea $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{P} : I_A$ es límite en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu)$ de elementos en $\mathcal{E}\}$.

Si $E \in \mathcal{R}$, entonces $I_E \in \mathcal{E}$, así que $E \in \mathcal{D}$.

Si $A, B \in \mathcal{D}$ y $A \subset B$, entonces obviamente $B - A \in \mathcal{D}$.

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de elementos en $\mathcal{D}$, entonces la sucesión $(I_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión no decreciente y uniformemente acotada de funciones no negativas $\mathcal{P}$-medibles, así que I_{A_n} converge a $I_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$ en $\mathcal{L}^2_{\mathcal{P}}(\mu)$. Por lo tanto, como cada función I_{A_n} es límite en $\mathcal{L}^2_{\mathcal{P}}(\mu)$ de elementos en $\mathcal{E}$, también es así para $I_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$.

Por último, $\mathbb{R}^+ \times \Omega \in \mathcal{D}$ pues $\mathbb{R}^+ \times \Omega = (\{0\} \times \Omega) \cup ((0, \infty) \times \Omega)$.

$\mathcal{D}$ es entonces un d-sistema que contiene a los elementos de $\mathcal{R}$, así que $\mathcal{D}$ contiene a los elementos de $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{P}$.

■

Corolario 3. *Supongamos que μ es una medida finita definida sobre $\mathcal{P}$. Entonces, cualquier función simple $\mathcal{P}$-medible es límite en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu)$ de elementos en $\mathcal{E}$.*

Proposición 5. *Sea μ una medida finita definida sobre $\mathcal{P}$. Entonces, para cualquier función $f \in L^2_{\mathcal{P}}(\mu)$, existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en $\mathcal{E}$ tales que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu)$.*

Demostración

Sabemos que si $f \in L^2_{\mathcal{P}}(\mu)$, existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples $\mathcal{P}$-medibles tales que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+\times\Omega} |f - s_n|^2 \, d\mu = 0$$

Así que, dada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{\mathbb{R}^+\times\Omega} |f - s_n|^2 \, d\mu < \frac{\varepsilon^2}{4}$ para cualquier $n \geq N$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea f_n una función en $\mathcal{E}$ tal que $\int_{\mathbb{R}^+\times\Omega} |f_n - s_n|^2 \, d\mu < \frac{\varepsilon^2}{4}$.

Por la desigualdad del triángulo, se tiene entonces, para cualquier $n \geq N$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^+\times\Omega} |f_n - f|^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^+\times\Omega} |f_n - s_n|^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^+\times\Omega} |s_n - f|^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$< \left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

Así que:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^+\times\Omega} |f_n - f|^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \text{ para cualquier } n \geq N.$$

Se sigue entonces que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu)$.

■

Integrales estocásticas de procesos elementales

Si Z es una función elemental, entonces, para cada $\omega \in \Omega$, la función $s \to Z(s, \omega)$ de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ es escalonada. En efecto, Z admite la siguiente representación:

$Z = a_0 I_{\{0\} \times G_0} + \sum_{k=1}^{n} a_k I_{(t_{k-1}, t_k] \times G_k} + a_{n+1} I_{(t_n, t_{n+1}] \times G_{n+1}}$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ son números reales, $t_0, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^+$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n < t_{n+1} = \infty$, $G_0 \in \mathcal{F}_0$ y, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $G_k \in \mathcal{F}_{t_{k-1}}$.

Así que, si $s \in \mathbb{R}^+$:

$Z(s, \omega) = a_0 I_{G_0}(\omega) I_{\{0\}}(s) + \sum_{k=1}^{n} a_k I_{G_k}(\omega) I_{(t_{k-1}, t_k]}(s) + a_{n+1} I_{G_{n+1}}(\omega) I_{(t_n, t_{n+1})}(s)$

Por lo tanto, si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es una función continua, la función $s \to Z(s, \omega)$ es Riemann-Stieljes integrable con respecto a f sobre cualquier intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}^+$.

Definición 56. *Para cada función elemental Z, $t \in \mathbb{R}^+$ y $\omega \in \Omega$, definamos:*

$\int_0^t Z_s(\omega)\, dW_s(\omega) = (RS) \int_0^t Z_s(\omega)\, dW_s(\omega)$

donde (RS) indica que se trata de una integral de Riemann-Stieltjes.

Para cada $t \in \mathbb{R}^+$, denotaremos por $\int_0^t Z_s dW_s$ a la función $\omega \to \int_0^t Z_s(\omega)\, dW_s(\omega)$

Para ilustrar, veamos cómo se calcula la integral

$$(\mathbf{RS})\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} I_{(\mathbf{a},\mathbf{b}]\times\mathbf{F}}\left(\mathbf{s},\boldsymbol{\omega}\right)dW_{\mathbf{s}}\left(\boldsymbol{\omega}\right)$$

donde $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^+$, $\mathbf{a}<\mathbf{b}$ y $\mathbf{F}\in\Im$.

Recordemos la fórmula de integración por partes para la integral de Riemann-Stieltjes:

Sean $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ y $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ dos funciones acotadas y supongamos que f es integrable con respecto a g, entonces g es integrable con respecto a f y, además, se tiene:

$$\int_c^d gdf = g(d)f(d)-g(c)f(c)-\int_c^d fdg$$

Definamos la función $g:[0,b]\times\Omega\to\mathbb{R}$ mediante la relación:

$$g\left(s,\omega\right)=I_{(a,b]\times F}\left(s,\omega\right)$$

Para $t\in\mathbb{R}^+$, evaluemos la integral $\int_0^t W_s\left(\omega\right)dg\left(s,\omega\right)$:

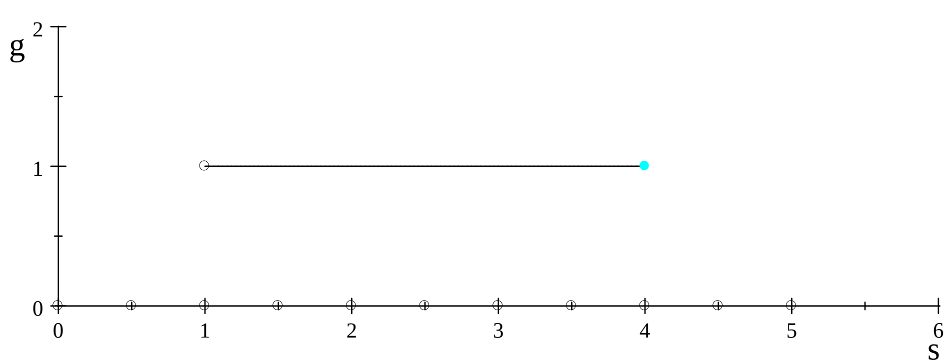
$$\int_0^t W_s\left(\omega\right)dg\left(s,\omega\right)=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^n W_{\xi_k}\left(\omega\right)\left[g(x_k,\omega)-g(x_{k-1},\omega)\right]$$

Donde $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ es una partición del intervalo $[0,t]$ y $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ para $k\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que, si $a\leq t$, entonces $a\in P$ y que, si $b\in[0,t]$, entonces $b\in P$.

En la gráfica siguiente se ilustra lo anterior, con $a=1$, $b=4$ y $t=5$.

Como g toma el valor 1 en el intervalo $(1,4]$ y el valor 0 fuera de ese intervalo, únicamente hay un término distinto de cero en la suma $\sum_{k=1}^n W_{\xi_k}\left(\omega\right)\left[g(x_k,\omega)-g(x_{k-1},\omega)\right]$.



Así que:

$$\sum_{k=1}^{n} W_{\xi_k}(\omega)\left[g(x_k,\omega)-g(x_{k-1},\omega)\right]=\begin{cases}0 & \text{si } t\le a\\ W_{\xi}(\omega)\, I_F(\omega) & \text{en otro caso}\end{cases}$$

donde $\xi\in[a,\xi_k]$ para alguna k.

Por lo tanto:

$\int_0^t W_s(\omega)\, dg(s,\omega)=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} W_{\xi_k}(\omega)\left[g(x_k,\omega)-g(x_{k-1},\omega)\right]$

$=\begin{cases}0 & \text{si } t\le a\\ \lim_{\xi\to a} W_{\xi}(\omega)\, I_F(\omega) & \text{en otro caso}\end{cases}=\begin{cases}0 & \text{si } t\le a\\ W_a(\omega)\, I_F(\omega) & \text{en otro caso}\end{cases}$

Así que, utilizando la fórmula de integración por partes, obtenemos:

$\int_0^t I_{(a,b]\times F}(s,\omega)\, dW_s(\omega)=I_{(a,b]\times F}(t,\omega)\, W_t(\omega)-I_{(a,b]\times F}(0,\omega)\, W_0(\omega)-\int_0^t W_s(\omega)\, dg(s,\omega)$

$=I_{(a,b]\times F}(t,\omega)\, W_t(\omega)-\int_0^t W_s(\omega)\, dg(s,\omega)$

$=\begin{cases}0 & \text{si } t\le a\\ (W_t(\omega)-W_a(\omega))I_F(\omega) & \text{si } a<t<b\\ (W_b(\omega)-W_a(\omega))I_F(\omega) & \text{si } t\ge b\end{cases}$

Obsérvese que el cálculo anterior se hace para cada $\omega\in\Omega$. Más adelante, al extender la integral estocástica a procesos que no son elementales, veremos que ya no es así, ya que la integral estocástica se obtiene como el límite en $L^2(\Omega,\Im,P)$ de una sucesión de variables aleatorias.

Teorema 22. *Sea* $E \in \mathcal{R}$, $Z = I_E$ *y, para* $t \in \mathbb{R}^+$, $N_t = \int_0^t Z_u dW_u$, *entonces:*

$(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *es una martingala continua y nula en* $t = 0$.

El proceso $\left(N_t^2 - \int_0^t Z_u^2 du\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *es una martingala continua y nula en* $t = 0$.

Demostración

Si $E = \{0\} \times F$, con $F \in \Im_0$, entonces, para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, $N_t = 0$ y $N_t^2 - \int_0^t Z_u^2 du = 0$, así que el resultado es trivial.

Supongamos ahora que $E = (a, b| \times F$, con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}^+$ tales que $a < b$ y $F \in \Im_a$.

Se tiene, para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$:

$$N_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ (W_t - W_a)I_F & \text{si } a < t < b \\ (W_b - W_a)I_F & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

$$N_t^2 - \int_0^t Z_u^2 du = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ (W_t - W_a)^2 I_F - (t-a)I_F & \text{si } a < t < b \\ (W_b - W_a)^2 I_F - (b-a)I_F & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

Obviamente, N_t y $N_t^2 - \int_0^t Z_s^2 ds$ son $\Im_t$-medibles, de esperanza finita y nulas si $t = 0$.

Definamos, para $t \in \mathbb{R}^+$, $Y_t = N_t^2 - \int_0^t Z_u^2 du$.

Para $s < t$, se tiene:

$$N_t - N_s = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ (W_t - W_a)I_F & \text{si } s \leq a < t < b \\ (W_t - W_s)I_F & \text{si } a < s < t < b \\ (W_b - W_s)I_F & \text{si } a < s < b \leq t \\ 0 & \text{si } a < b \leq s < t \end{cases}$$

Así que $E\left[N_t - N_s \mid \Im_s\right] = 0$, ya que $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es martingala.

$$Y_t - Y_s = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ (W_t - W_a)^2 I_F - (t-a)I_F & \text{si } s \leq a < t < b \\ (W_t - W_a)^2 I_F - (W_s - W_a)^2 I_F - (t-s)\, I_F & \text{si } a < s < t < b \\ (W_b - W_a)^2 I_F - (W_s - W_a)^2 I_F - (b-s)I_F & \text{si } a < s < b \leq t \\ 0 & \text{si } a < b \leq s < t \end{cases}$$

Por lo tanto:

$E\left[Y_t - Y_s \mid \Im_s\right]$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ E\left[(W_t - W_a)^2 I_F - (t-a) I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } s \leq a < t < b \\ E\left[(W_t - W_a)^2 I_F - (W_s - W_a)^2 I_F - (t-s)\, I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } a < s < t < b \\ E\left[(W_b - W_a)^2 I_F - (W_s - W_a)^2 I_F - (b-s) I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } a < s < b \leq t \\ 0 & \text{si } a < b \leq s < t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ E\left[(W_t^2 - W_a^2)\, I_F - (t-a) I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } s \leq a < t < b \\ E\left[(W_t^2 - W_a^2) I_F - (W_s^2 - W_a^2) I_F - (t-s)\, I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } a < s < t < b \\ E\left[(W_b^2 - W_a^2) I_F - (W_s^2 - W_a^2) I_F - (b-s) I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } a < s < b \leq t \\ 0 & \text{si } a < b \leq s < t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ E\left[(W_t^2 - t)\, I_F - (W_a^2 - a) I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } s \leq a < t < b \\ E\left[(W_t^2 - t) I_F - (W_s^2 - s)\, I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } a < s < t < b \\ E\left[(W_b^2 - b) I_F - (W_s^2 - s) I_F \mid \Im_s\right] & \text{si } a < s < b \leq t \\ 0 & \text{si } a < b \leq s < t \end{cases}$$

Así que $E\left[Y_t - Y_s \mid \Im_s\right] = 0$, ya que $(W_t^2 - t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ es martingala.

$\blacksquare$

Proposición 6. *Sean $E, G \in \mathcal{R}$ ajenos, $U = I_E$ y $V = I_G$ entonces:*

El proceso $\left(\left(\int_0^t U_s dW_s\right)\left(\int_0^t V_s dW_s\right)\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *es una martingala continua y nula en $t = 0$.*

Demostración

Si E (o G) es de la forma $\{0\} \times F$, con $F \in \Im_0$, $\int_0^t U_s dW_s = 0$ para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$ (o $\int_0^t V_s dW_s = 0$ para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$), así que el resultado es trivial.

Supongamos ahora que:

$E = (a_1, b_1| \times F_1$, con $a_1, b_1 \in \overline{\mathbb{R}}^+$ tales que $a_1 < b_1$ y $F_1 \in \Im_{a_1}$

$G = (a_2, b_2| \times F_2$, con $a_2, b_2 \in \overline{\mathbb{R}}^+$ tales que $a_2 < b_2$ y $F_2 \in \Im_{a_2}$

Se tiene entonces:

$$\int_0^t U_s dW_s = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a_1 \\ (W_t - W_{a_1})I_{F_1} & \text{si } a_1 < t \leq b_1 \\ (W_{b_1} - W_{a_1})I_{F_1} & \text{si } t > b_1 \end{cases}$$

$$\int_0^t V_s dW_s = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a_2 \\ (W_t - W_{a_2})I_{F_2} & \text{si } a_2 < t \leq b_2 \\ (W_{b_2} - W_{a_2})I_{F_2} & \text{si } t > b_2 \end{cases}$$

Como $E \cap G = \emptyset$, entonces, o bien $(a_1, b_1|$ y $(a_2, b_2|$ son ajenos, o bien F_1 y F_2 son ajenos. En el segundo caso Y_t es 0 para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, así que se tiene el resultado.

Supongamos ahora que $(a_1, b_1|$ y $(a_2, b_2|$ son ajenos; digamos $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2$. Se tiene entonces:

$$\left(\int_0^t U_s dW_s\right)\left(\int_0^t V_s dW_s\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a_2 \\ (W_{b_1} - W_{a_1})I_{F_1}(W_t - W_{a_2})I_{F_2} & \text{si } a_2 < t \leq b_2 \\ (W_{b_1} - W_{a_1})I_{F_1}(W_{b_2} - W_{a_2})I_{F_2} & \text{si } t > b_2 \end{cases}$$

$$= (W_{b_1} - W_{a_1})I_{F_1} \int_0^t V_s dW_s$$

Así que, por la proposición anterior, $\left(\left(\int_0^t U_s dW_s\right)\left(\int_0^t V_s dW_s\right)\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua y nula en $t = 0$.

■

Corolario 4. *Si Z es una función elemental y, para $t \in \mathbb{R}^+$, $N_t = \int_0^t Z_s dW_s$, entonces:*

$(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua y nula en $t = 0$.

El proceso $\left(N_t^2 - \int_0^t Z_s^2 ds\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua y nula en $t = 0$.

Demostración

Sea $Z = \sum_{k=1}^m b_k I_{E_k}$ una función elemental, donde los conjuntos E_k pertenecen a $\mathcal{R}$ y son ajenos por parejas (los coeficientes b_k no necesariamente son distintos). Entonces:

$$Z^2 = \sum_{k=1}^m b_k^2 I_{E_k}$$

$$N_t = \sum_{k=1}^m b_k \int_0^t I_{E_k}(s)\, dW_s$$

$$N_t^2 = \sum_{k=1}^m b_k^2 \left(\int_0^t I_{E_k}(s)\, dW_s\right)^2 + 2\sum_{\{j,k\in\{1,2,\ldots,m\}:j<k\}} b_j b_k \left(\int_0^t I_{E_j}(s)\, dW\right)\left(\int_0^t I_{E_k}(s)\, dW_s\right)$$

$$\int_0^t Z_s^2 ds = \sum_{k=1}^m b_k^2 \int_0^t I_{E_k}(s)\, ds$$

$$N_t^2 - \int_0^t Z_s^2 ds = \sum_{k=1}^m b_k^2 \left[\left(\int_0^t I_{E_k}(s)\, ds\right)^2 - \int_0^t I_{E_k}(s)\, ds\right]$$

$$+2\sum_{\{j,k\in\{1,2,\ldots,m\}:j<k\}} b_j b_k \left(\int_0^t I_{E_j}(s)\, ds\right)\left(\int_0^t I_{E_k}(s)\, ds\right)$$

■

Extensión de la integral estocástica a los procesos en $L^2_{\mathcal{P}}$

En el proceso de extensión de la integral estocástica vamosa utilizar las siguientes definiciones y resultados:

Definición 57. *Diremos que una función $\varphi : I \to \mathbb{R}$, donde es un intervalo no vacío, es convexa si, para cualquier par de puntos $x, y \in I$, con $x < y$, y cualquier punto z en el intervalo cerrado J, cuyos extremos son x y y, se tiene $\varphi(z) \leq \ell(x)$, donde ℓ es la función, definida sobre J, cuya gráfica es el segmento de recta que une los puntos $(x, \varphi(x))$ y $(y, \varphi(y))$; es decir:*

$$\varphi(z) \leq \varphi(x) + \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}(z-x)$$

Resultados:

I. Una función $\varphi : I \to \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si, para cualquier par de puntos $x, y \in I$ y cualquier $\lambda \in [0,1]$, se tiene:

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$$

II. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $\varphi : I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces la derivada por la derecha y por la izquierda de φ existen en todo punto $x \in I$ y ambas son funciones no decrecientes. Además, si $x, y, z \in I$ y $x < y$, entonces:

i) $\varphi'_i(z) \leq \varphi'_d(z)$

ii) $\varphi'_d(x) \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leq \varphi'_i(y)$

III. (**Desigualdad de Jensen**) Sea $\mathcal{G}$ una subσ-álgebra de $\mathcal{F}$, X una variable aleatoria de esperanza finita y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa tal que $\varphi(X)$ tiene esperanza finita, entonces $\varphi(E[X \mid \mathcal{G}]) \leq E[\varphi(X) \mid \mathcal{G}]$.

IV. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias la cual converge a X en L^p, con $p \in [1, \infty)$, y $\mathcal{G}$ una sub σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Entonces la sucesión $(E[X_n \mid \mathcal{G}])_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $E[X \mid \mathcal{G}]$ en L^p .

V. Sea $p \in [1, \infty\ )$, $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un proceso estocástico y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\left(M_t^{(n)}\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ una martingala tal que, para cada $t \in \mathbb{R}_+$,$\left(M_t^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a M_t en L^p, entonces $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ es una martingala.

VI. (**Desigualdad de Doob**) Sea $p \in [1, \infty\ )$ y $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ una martingala continua por la derecha tal que $M_t \in L^p$ para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, entonces, para cualquier $\tau \in \mathbb{R}_+$ y $c > 0$, se tiene:

$$P\left(\sup\left\{|M_t| : t \in [0, \tau]\right\} \geq c\right) \leq \tfrac{1}{c^p} E\left(|M_\tau|^p\right)$$

En lo que se refiere a las funciones convexas, puede consultarse algún libro de Análisis; por ejemplo, *Real Analysis*, de H. L. Royden.

Los resultados correspondientes a las martingalas los demostraremos más adelante.

Denotemos por $\|\|$ a la norma en $L^2(\Omega, \Im, P)$ y, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, por $\|\|_t$ a la norma en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_t)$.

Demostraremos ahora el resultado central de Ito.

Teorema 23. *Sea $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un proceso previsible en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_\tau)$ para cualquier $\tau \in \mathbb{R}^+$, existe entonces una única martingala continua nula en cero, $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, tal que:*

i) Si $\left(Z^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de procesos elementales que converge a Z en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_\tau)$, entonces, para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, la sucesión $\left(\int_0^t Z_s^{(n)} dW_s\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a N_t en $L^2(\Omega, \Im, P)$.

ii) $E[N_t^2] = E\left[\int_0^t Z_s^2 ds\right]$ para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$.

Demostración

Si U es una función elemental, sabemos, por el corolario 4, que el proceso $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, definido por $Y_t = \left(\int_0^t U_s dW_s\right)^2 - \int_0^t U_s^2 ds$, es una martingala continua y nula en $t = 0$. En particular, para cualquier $\tau \in [0, \infty)$, se tiene:

$$E\left[\left(\int_0^\tau U_s dW_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^\tau U_s^2 ds\right] < \infty$$

De lo cual se sigue que la variable aleatoria $\int_0^\tau U_s dW_s$ pertenece a $L^2(\Omega, \Im, P)$.

Para $\tau \in (0, \infty)$, definamos la función $G_\tau : \mathcal{E} \to L^2(\Omega, \Im, P)$ definida por:

$$G_\tau(U) = \int_0^\tau U_s dW_s$$

Obviamente, G_τ es lineal y, por la igualdad $E\left[\left(\int_0^\tau U_s dW_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^\tau U_s^2 ds\right]$, se tiene:

$$\|U\|_\tau = \|G_\tau(U)\|$$

+Es decir, G_τ **es una isometría lineal que asigna a cada proceso**

$$\mathbf{U} \in \mathcal{E} \subset L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_\tau)$$

la variable aleatoria $\int_0^\tau \mathbf{U}_s dW_s \in L^2(\Omega, \Im, P)$.

Ahora, vamos a extender la isometría G_τ a una isometría que asigna a cada elemento en $L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_\tau)$ un elemento en $L^2(\Omega, \Im, P)$.

Como el conjunto $\mathcal{E}$ de funciones elementales es denso en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_\tau)$, existe una sucesión $\left(Z^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones elementales cuyo límite en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_\tau)$ es Z; es decir:

$$\text{lím}_{n\to\infty} E\left[\int_0^\tau \left(Z_s^{(n)} - Z_s\right)^2 ds\right] = 0$$

Así que, para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\text{lím}_{n\to\infty} E\left[\int_0^\tau \left(I_{[0,t]}(s)\, Z_s^{(n)} - I_{[0,t]}(s)\, Z_s\right)^2 ds\right]$$

$$\leq \text{lím}_{n\to\infty} E\left[\int_0^\tau \left(Z_s^{(n)} - Z_s\right)^2 ds\right]$$

$$= 0$$

Por lo tanto, $I_{[0,t]}Z^{(n)}$ converge en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_\tau)$ a $I_{[0,t]}Z$, así que, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, la sucesión $\left(Z^{(n)}I_{[0,t]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_\tau)$, es decir, dada $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left\|I_{[0,t]}Z^{(n)} - I_{[0,t]}Z^{(m)}\right\|_\tau < \varepsilon$$

para cualquier pareja de números naturales n y m mayores o iguales a M.

Por lo tanto:

$$\left\|G_\tau\left(I_{[0,t]}Z^{(n)}\right) - G_\tau\left(I_{[0,t]}Z^{(m)}\right)\right\| = \left\|G_\tau\left(I_{[0,t]}\left(Z^{(n)} - Z^{(m)}\right)\right)\right\|$$

$$= \left\|I_{[0,t]}\left(Z^{(n)} - Z^{(m)}\right)\right\|_\tau = \left\|I_{[0,t]}Z^{(n)} - I_{[0,t]}Z^{(m)}\right\|_\tau < \varepsilon$$

para cualquier pareja de números naturales n y m mayores o iguales a M.

Se sigue entonces que la sucesión $\left(G_\tau\left(Z^{(n)}I_{[0,t]}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^2(\Omega, \Im, P)$ y, por lo tanto, converge.

Si $\left(Y^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión de procesos elementales que converge a Z en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_\tau)$, entonces, para cualquier $t \in [0,\tau]$, $I_{[0,t]}Y^{(n)}$ converge en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_\tau)$ a $I_{[0,t]}Z$, así que:

$$\text{lím}_{n\to\infty}\left\|I_{[0,t]}\left(Z^{(n)} - Y^{(n)}\right)\right\|_\tau = \text{lím}_{n\to\infty}\left\|I_{[0,t]}Z^{(n)} - I_{[0,t]}Y^{(n)}\right\|_\tau$$

$$\leq \text{lím}_{n\to\infty}\left\|I_{[0,t]}Z^{(n)} - I_{[0,t]}Z\right\|_\tau + \text{lím}_{n\to\infty}\left\|I_{[0,t]}Z - I_{[0,t]}Y^{(n)}\right\|_\tau = 0$$

Así que:

$\lim_{n\to\infty} \left\| G_t\left(I_{[0,t]}Z^{(n)}\right) - G_t\left(I_{[0,t]}Y^{(n)}\right) \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| G_t\left(I_{[0,t]}\left(Z^{(n)} - Y^{(n)}\right)\right) \right\|$

$= \lim_{n\to\infty} \left\| I_{[0,t]}\left(Z_s^{(n)} - Y_s^{(n)}\right) \right\|_\tau = 0$

Por lo tanto, las sucesiones $\left(G_\tau\left(Z^{(n)}I_{[0,t]}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left(G_\tau\left(I_{[0,t]}Y^{(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tienen el mismo límite en $L^2(\Omega, \Im, P)$.

Para cada $t \in \mathbb{R}^+$, denotemos por X_t al límite en $L^2(\Omega, \Im, P)$ de la sucesión $\left(G_\tau\left(I_{[0,t]}Z^{(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Se tiene entonces:

$$\|X_t\| = \lim_{n\to\infty} \left\| G_\tau\left(I_{[0,t]}Z^{(n)}\right) \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \left(I_{[0,t]}Z^{(n)}\right) \right\|_\tau = \left\| I_{[0,t]}Z \right\|_\tau$$

Es decir:

$$E\left[X_t^2\right] = E\left[\int_0^t Z_s^2 ds\right]$$

X_t es ya básicamente lo que podríamos definir como la integral estocástica $\int_0^t Z_s dW_s$; sin embargo, fijando $\omega \in \Omega$, la función $t \to X_t(\omega)$ no necesariamente es continua.

Lo que vamos a hacer ahora es encontrar una versión continua de la integral estocástica $\int_0^t Z_s dW_s$. Lo haremos primero fijando $\tau \in (0,\infty)$ y encontrando una versión continua de esa integral en el intervalo $[0,\tau]$. Después tomaremos una sucesión creciente $(\tau_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de números reales positivos la cual tienda a infinito, para así obtener una versión continua de la integral estocástica $\int_0^t Z_s dW_s$, con $t \in [0,\infty)$.

Fijemos $\tau \in (0,\infty)$ y, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, definamos:

$$N_t^{(n)} = G_\tau\left(I_{[0,t]}Z^{(n)}\right) = \int_0^\tau I_{[0,t]}Z^{(n)}dW_s = \int_0^t I_{[0,\tau]}Z^{(n)}dW_s$$

Obsérvese que, si $t > \tau$, entonces $N_t^{(n)} = N_\tau^{(n)}$; es decir, $N_t^{(n)}$ es constante a partir de $t = \tau$.

Obsérvese también que las integrales $\int_0^\tau I_{[0,t]}Z^{(n)}dW_s$ y $\int_0^t I_{[0,\tau]}Z^{(n)}dW_s$ son integrales de Riemann-Stieltjes.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\omega \in \Omega$ definamos la función $N^{(n,\omega)} : [0,\tau] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$N^{(n,\omega)}(t) = N_t^{(n)}(\omega)$$

Vamos a demostrar que existe una sucesión creciente de números naturales $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ y un conjunto $C \in \Im$, de probabilidad 1, tales que, para cualquier $\omega \in C$, la sucesión de funciones $\left(N^{(k_m,\omega)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en el intervalo $[0,\tau]$.

Siendo $\left(N_t^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega,\Im,P)$, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, existe una sucesión creciente de números naturales $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$E\left(\left|N_t^{(j)} - N_t^{(k)}\right|^2\right) \leq \tfrac{1}{2^{3m}}$$

para cualquier pareja de números naturales j y k mayores o iguales a k_m.

Se tiene entonces, para cualquier $m \in \mathbb{N}$:

$$E\left(\left|N_t^{(k_{m+1})} - N_t^{(k_m)}\right|^2\right) \leq \tfrac{1}{2^{3m}}$$

Por el corolario 4, sabemos que $\left(N_t^{(n)}\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua y nula en $t = 0$. Por lo tanto, para cada $m \in \mathbb{N}$, el proceso $\left(N_t^{(k_{m+1})} - N_t^{(k_m)}\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua y nula en $t = 0$.

Por la desigualdad de Doob, se tiene:

$P\left(\sup\left\{\left|N_t^{(k_{m+1})}-N_t^{(k_m)}\right|:t\in[0,\tau]\right\}\geq\frac{1}{2^m}\right)\leq 2^{2m}E\left(\left|N_\tau^{(k_{m+1})}-N_\tau^{(k_m)}\right|^2\right)$

$\leq 2^{2m}\frac{1}{2^{3m}}=\frac{1}{2^m}$

Así que, por el lema de Borel Cantelli:

$P\left[\left\{\omega\in\Omega:\left|N_t^{(k_{m+1})}(\omega)-N_t^{(k_m)}(\omega)\right|\geq\frac{1}{2^m}\right.\right.$ para cualquier $t\in[0,\tau]$,

para una infinidad de valores de $m\}]=0$

Por lo tanto, si:

$C=\left\{\omega\in\Omega:\right.$ Existe $N_\omega\in\mathbb{N}$ tal que $\left|N_t^{(k_{m+1})}(\omega)-N_t^{(k_m)}(\omega)\right|<\frac{1}{2^m}$

para cualquier $t\in[0,\tau]$ y cualquier $m\geq N_\omega\}$

entonces $P(C)=1$.

Tomemos $\omega\in C$ y $N_\omega\in\mathbb{N}$ tal que $\left|N_t^{(k_{m+1})}(\omega)-N_t^{(k_m)}(\omega)\right|<\frac{1}{2^m}$ para cualquier $t\in[0,\tau]$ y cualquier $m\geq N_\omega$; entonces, dada $\varepsilon>0$, tomemos $M\geq N_\omega$ tal que $\frac{1}{2^{M-1}}<\varepsilon$.

Se tiene entonces, para cualquier $t\in[0,\tau]$ y cualquier pareja de números naturales n y m tales que $n>m\geq M$:

$\left|N_t^{(k_n)}(\omega)-N_t^{(k_m)}(\omega)\right|\leq\sum_{j=0}^{n-m-1}\left|N_t^{(k_{m+j+1})}(\omega)-N_t^{(k_{m+j})}(\omega)\right|<\sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{1}{2^{m+j}}$

$<\frac{1}{2^{m-1}}\leq\frac{1}{2^{M-1}}<\varepsilon$

Por lo tanto, la sucesión $\left(N^{(k_m,\omega)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en el intervalo $[0,\tau]$; así que la convergencia de $\left(N^{(k_m,\omega)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ es uniforme en ese intervalo.

Denotemos por $(N_t(\omega))_{t\in[0,\tau]}$ al límite uniforme de esa sucesión.

Como, para cualquier $m\in\mathbb{N}$, la función $t\to N_t^{(k_m)}(\omega)$ es continua en el intervalo $[0,\tau]$, también la función $t\to N_t(\omega)$ lo es.

Si $\omega\notin C$, definamos $N_t(\omega)=0$.

Por otra parte, como, para cada $t \in [0,\tau]$, la sucesión $\left(N_t^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $L^2(\Omega,\Im,P)$ a X_t, también $N_t^{(k_m)}$ converge en $L^2(\Omega,\Im,P)$ a X_t; por lo tanto, converge también en probabilidad y, entonces, existe una subsucesión de $\left(N_t^{(k_m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ la cual converge a X_t con probabilidad 1. Por lo tanto, $N_t = X_t$ casi seguramente. Así que, para cualquier $t \in [0,\tau]$, la sucesión $\left(N_t^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $L^2(\Omega,\Im,P)$ a N_t.

De esta forma, ya tenemos una parte del proceso $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ que buscamos; lo tenemos únicamente para $t \in [0,\tau]$.

Tomemos una sucesión creciente $(\tau_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de números reales positivos la cual tienda a infinito.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, definamos:

$$\left(N_m^{(n)}\right)_t = G_{\tau_m}\left(I_{[0,t]}Z^{(n)}\right)$$

Además, denotemos por $((N_m)_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ al proceso $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ correspondiente a $\tau = \tau_m$.

Entonces, para cualquier $t \in [0,\tau_m]$, la sucesión $\left(\left(N_m^{(n)}\right)_t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $L^2(\Omega,\Im,P)$ a $(N_m)_t$.

Lo que vamos a hacer ahora es "pegar"los procesos $((N_m)_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$. Para eso, necesitamos demostrar que, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, los procesos $((N_m)_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ y $((N_{m+1})_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ coinciden en el intervalo $[0, \tau_m]$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, si $t \in [0, \tau_m]$ también se tiene $t \in [0, \tau_{m+1}]$, así que la sucesión $\left(\left(N_m^{(n)}\right)_t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $L^2(\Omega, \Im, P)$ a $(N_m)_t$ y también converge en $L^2(\Omega, \Im, P)$ a $(N_{m+1})_t$; por lo tanto, si $t \in [0, \tau_m]$, $(N_{m+1})_t = (N_m)_t$ con probabilidad 1.

Tomando un conjunto numerable $\{s_j : j \in \mathbb{N}\}$ denso en $[0, \tau_m]$, se tiene, fuera de un conjunto de probabilidad 0, $(N_{m+1})_{s_j} = (N_m)_{s_j}$ para cualquier $j \in \mathbb{N}$.

Por la continuidad de los procesos $((N_m)_t)_{t\in[0,\tau_m]}$ y $((N_{m+1})_t)_{t\in[0,\tau_{m+1}]}$ se tiene, fuera de un conjunto D_m de probabilidad 0, $(N_{m+1})_t = (N_m)_t$ para cualquier $t \in [0, \tau_m]$.

Ahora ya podemos "pegar"los procesos $((N_m)_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$**.**

Si $\omega \in \cup_{m=1}^{\infty} D_m$, redefinamos $(N_m)_t(\omega) = 0$ para cualquier $t \in [0, \tau_m]$ y $m \in \mathbb{N}$.

Definamos:

$$N_t = (N_m)_t \text{ si } t \in [0, \tau_m]$$

$(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es entonces un proceso continuo tal que, para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$ y cualquier $m \in \mathbb{N}$, la sucesión $\left(\left(N_m^{(n)}\right)_t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $L^2(\Omega, \Im, P)$ a N_t.

Como, para cada pareja $n, m \in \mathbb{N}$, el proceso$\left(\left(N_m^{(n)}\right)_t\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala y, para cada $t \in \mathbb{R}^+$ y cualquier $m \in \mathbb{N}$, la sucesión $\left(\left(N_m^{(n)}\right)_t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a N_t en $L^2(\Omega, \Im, P)$, entonces, el proceso $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala.

La unicidad es evidente.

■

Definición 58. *Si* $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *es un proceso previsible en* $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_\tau)$ *para cualquier* $\tau \in \mathbb{R}^+$ *y* $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *es la única martingala continua y nula en* $t = 0$*, tal que, si* $\left(Z^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de funciones elementales que converge a* Z *en* $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_\tau)$*, entonces, la sucesión* $\left(\int_0^\tau Z_s^{(n)} dW_s\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* N_τ *en* $L^2(\Omega, \Im, P)$*, definimos:*

$$\int_0^t Z_s dW_s = N_t \text{ para cualquier } t \in \mathbb{R}^+$$

En ocasiones nos referiremos al proceso $\left(\int_0^t Z_s dW_s\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ simplemente como $\int Z dW$.

Comentario. Dado un proceso previsible $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_t)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, la integral estocástica $\int_0^t Z_s dW_s$ está bien definida para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$ de tal manera que el proceso estocástico $\left(\int_0^t Z_s dW_s\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua, nula en $t = 0$. Además, para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, la variable aleatoria $\int_0^t Z_s dW_s$ pertenece a $L^2(\Omega, \Im, P)$ y se tiene:

$$E\left[\left(\int_0^t Z_s dW_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t Z_s^2 ds\right]$$

Esto implica que, si $\left((Z_t^n)_{t\in\mathbb{R}^+}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de procesos previsibles, en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_t)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, y $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es un un proceso previsible en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_t)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$ tal que, para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, la sucesión $(Z_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_t)$ a Z_t, entonces la sucesión de variables aleatorias $\left(\int_0^t Z_s^n dW_s\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $L^2(\Omega, \Im, P)$ a la variable aleatoria $\int_0^t Z_s dW_s$.

En efecto, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$E\left[\left(\int_0^t Z_s^n dW_s - \int_0^t Z_s dW_s\right)^2\right] = E\left[\left(\int_0^t (Z_s^n - Z_s)\, dW_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t (Z_s^n - Z_s)^2\, ds\right]$$

Así que:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\int_0^t Z_s^n dW_s - \int_0^t Z_s dW_s\right)^2\right] = \lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^t (Z_s^n - Z_s)^2\, ds\right] = 0$$

Tomemos ahora $a, b \in \mathbb{R}^+$ tales que $a < b$ y $X \in L^2(\Omega, \Im_a, P)$.

Como X no depende de t, parece evidente que se tiene:

$$\int_0^t XI_{(a,b]}dW_s = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ X(W_t - W_a) & \text{si } t \in (a,b] \\ X(W_b - W_a) & \text{si } t > b \end{cases}$$

Esta igualdad es válida; sin embargo, requiere una demostración ya que la integral estocástica $\int_0^t XI_{(a,b]}dW_s$ está definida como un límite en $L^2(\Omega, \Im, P)$.

Proposición 7. *Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ tales que $a < b$ y $X \in L^2(\Omega, \Im_a, P)$. Entonces:*

$$\int_0^t XI_{(a,b]}dW_s = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ X(W_t - W_a) & \text{si } t \in (a,b] \\ X(W_b - W_a) & \text{si } t > b \end{cases}$$

Demostración

Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples $\Im_a$-medibles que converja a X en $L^2(\Omega, \Im_a, P)$.

Se tiene:

$$\text{lím}_{n\to\infty} E\left[(s_n - X)^2\right] = 0$$

Así que, como $W_b - W_a$ es independiente de cualquier variable aleatoria $\Im_a$-medible, ser tiene:

$$\text{lím}_{n\to\infty} E\left[[s_n(W_b - W_a) - X(W_b - W_a)]^2\right] = \text{lím}_{n\to\infty} E\left[(s_n - X)^2 (W_b - W_a)^2\right] = \\ \text{lím}_{n\to\infty} E\left[(s_n - X)^2\right] E\left[(W_b - W_a)^2\right] = 0$$

Por lo tanto, la sucesión $(s_n(W_b - W_a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $X(W_b - W_a)$ en $L^2(\Omega, \Im_a, P)$.

Por otra parte, el proceso $\left(s_n I_{(a,b]}(t)\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es nulo cuando $t \notin (a,b]$ y, si $t \in (a,b]$, la variable aleatoria $s_n I_{(a,b]}(t)$ es $\Im_a$-medible (por lo tanto, $\Im_t$-medible). Por lo tanto, el proceso el proceso $\left(s_n I_{(a,b]}(t)\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ está adaptado a la filtración $\{\Im_t : t \in \mathbb{R}^+\}$; además, es continuo por la izquierda; por lo tanto, es previsible.

Además:

$$\text{lím}_{n\to\infty} \int_0^t E\left[(s_n - X)^2\right] I_{(a,b]}(s)\, ds = \text{lím}_{n\to\infty} E\left[(s_n - X)^2\right] \int_0^t I_{(a,b]}(s)\, ds = 0$$

Así que, para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, la sucesión $\left(s_n I_{(a,b]}(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $L^2_{\mathcal{P}}(\mu_t)$ a $XI_{(a,b]}(t)$.

Por lo tanto, para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, la sucesión $\left(\int_0^t s_n I_{(a,b]}dW_s\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $L^2(\Omega, \Im, P)$ a $\int_0^t XI_{(a,b]}dW_s$.

Pero:

$$\int_0^t s_n I_{(a,b]}\left(s\right) dW_s = \left(RS\right) \int_0^t s_n I_{(a,b]}\left(s\right) dW_s = s_n \left(RS\right) \int_0^t I_{(a,b]}\left(s\right) dW_s$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ s_n(W_t - W_a) & \text{si } t \in (a,b] \\ s_n(W_b - W_a) & \text{si } t > b \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^t X I_{(a,b]} dW_s = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ X(W_t - W_a) & \text{si } t \in (a,b] \\ X(W_b - W_a) & \text{si } t > b \end{cases}$$

■